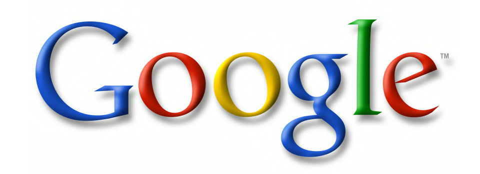


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`



Phys1066.4
SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"
1 Aug. 1898.
Digitized by Google


Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

ESSAI THÉORIQUE

SUR

L'ÉQUILIBRE DES MASSIFS PULVÉRULENTS,

COMPARÉ A CELUI DE MASSIFS SOLIDES,

ET

SUR LA POUSSÉE DES TERRES SANS COHÉSION.

Digitized by Google

(Extrait du tome XL des *Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers*, publiés par l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. — 1876.)

Digitized by Google

ESSAI THÉORIQUE

SUR

L'ÉQUILIBRE DES MASSIFS PULVÉRULENTS,

COMPARÉ A CELUI DE MASSIFS SOLIDES,

ET

SUR LA POUSSÉE DES TERRES SANS COHÉSION;

PAR

Joseph

M. J. BOUSSINESQ,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE.



BRUXELLES,

F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

—

1876

Digitized by Google

Phys 1066.4

HARVARD COLLEGE
AUG 1 1898
LIBRARY.
Farrar fund.

Digitized by Google

ESSAI THÉORIQUE

SUR

L'ÉQUILIBRE D'ÉLASTICITÉ DES MASSIFS PULVÉRULENTS

ET

SUR LA POUSSÉE DES TERRES SANS COHÉSION (*).

INTRODUCTION.

Équilibre-limite et équilibre d'élasticité des massifs pulvérulents.

1. Les milieux *pulvérulents*, tels qu'un amas de sable sec ou même de terre fraîchement remuée, dont les diverses parties n'éprouvent, à glisser les unes sur les autres, d'autre résistance que leur frottement mutuel, sont susceptibles de plusieurs modes distincts d'équilibre.

Le seul qui ait été étudié jusqu'ici est l'*équilibre-limite* qu'ils présentent lorsqu'ils sont sur le point de s'ébouler et que les frottements y atteignent par suite les valeurs les plus grandes qu'ils soient capables de recevoir. Dès 1856, Macquorn-Rankine avait trouvé les lois de cet équilibre pour le cas d'un massif pesant, limité supérieurement par un talus plan, et dans lequel

(*) Plusieurs des résultats que contient ce Mémoire ont été résumés dans une note insérée aux *Comptes rendus* de l'Académie des sciences de Paris (t. LXXVII, p. 1521, 29 décembre 1873).

Digitized by Google

on admet que l'*état ébouleux* s'établit à la fois de la même manière sur toute l'étendue d'un plan quelconque parallèle au talus supérieur (*). Plus récemment, M. Maurice Levy a retrouvé de son côté la même solution, spécifiée pour l'équilibre-limite qui se produit quand un mur de soutènement commence à se renverser; il a montré d'ailleurs que cette solution n'est admissible qu'autant qu'elle satisfait à une condition spéciale à la face postérieure du mur, condition déjà considérée par Poncelet dans l'ancienne théorie, et qui consiste en ce que la poussée éprouvée par cette face, au moment où la rupture devient imminente, doit avoir précisément une inclinaison telle, que le massif soit sur le point de glisser contre le mur (**); de plus, il a fait voir que la nouvelle théorie comprend tout ce qu'il y a d'acceptable dans l'ancienne de Coulomb (***). Enfin, M. de Saint-Venant (iv) a indiqué une méthode approchée pour déduire de la solution précédente une infinité d'autres solutions voisines, et c'est en la suivant que j'ai pu, soit obtenir celles-ci dans le cas où l'inclinaison du mur sur la verticale est inférieure à une certaine valeur-limite, soit démontrer leur impossibilité dans le cas contraire où l'inclinaison dont il s'agit dépasserait la même valeur-limite (v). Le Mémoire actuel se termine par une exposition simplifiée de ces divers

(*) *On the stability of loose Earth*, aux *Transactions philosophiques de la Société royale de Londres* (1856-1857). Sa théorie a été exposée géométriquement dans les *Annales des ponts et chaussées* (novembre 1872, p. 242), par M. Flamant, ingénieur des ponts et chaussées.

(**) M. Levy n'avait donné d'abord l'expression de la poussée que pour le cas particulier où la face postérieure du mur est verticale et où le talus supérieur a sur l'horizon l'inclinaison maxima φ : M. de Saint-Venant a remarqué que la même analyse conduisait à des formules simples dans une infinité d'autres cas, notamment dans celui d'un terre-plein horizontal soutenu par un mur ayant un fruit intérieur égal à $\operatorname{tg.}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)$. Voir relativement à ces deux cas particuliers, au *Compte rendu* du 21 juin 1869 (t. LXVIII, p. 1456), un article où M. Maurice Levy dit aussi avoir puisé la première idée de son Mémoire dans un remarquable travail (*Traité de la stabilité des constructions*, Brunswick, 1857) de M. le Docteur Scheffler, qui avait considéré l'équilibre-limite d'un massif dont la surface supérieure est horizontale.

(***) Le Mémoire de M. Levy a paru *in extenso* au *Journal de Mathématiques de M. Liouville* (t. XVIII, 1873; pp. 241 à 300).

(iv) Au n° 7 d'un Mémoire inséré aux *Comptes rendus* des 7 et 14 février 1870 (t. LXX, pp. 229 et 281). Voir aussi au *Compte rendu* de la première de ces séances (p. 217), le Rapport approbatif de M. de Saint-Venant sur le Mémoire de M. Levy.

(v) *Compte rendu*, même tome, p. 751, numéro du 4 avril 1870, qui contient également (p. 717) un article de M. de Saint-Venant sur le même sujet.

Digitized by Google

résultats, étendus même à des cas où les surfaces limitant le massif sont courbes, et précédés de considérations qui démontrent le fait de la production presque instantanée de l'état ébouleux dans une grande partie des massifs au moment de leur rupture. Ce fait, implicitement admis par Rankine et par M. Levy, n'est pas du tout évident.

Mais il y a un autre genre d'équilibre également important à considérer : c'est celui que présente une masse sablonneuse en repos, soutenue par un mur assez ferme pour n'éprouver aucun ébranlement. Dans cet état, le frottement mutuel des couches est généralement moindre que dans le précédent, tout comme, à l'intérieur d'un solide en équilibre d'élasticité, les tensions restent partout inférieures à celles qui altéreraient d'une manière permanente la structure du corps : les particules sont donc moins retenues par leurs actions mutuelles que dans le cas où le mur de soutènement les fuirait en cédant sous leur pression, et elles exercent sur ce dernier une poussée supérieure à celle qu'indiquent les formules de Rankine.

C'est surtout ce genre d'équilibre que je me propose d'étudier ici : je l'appelle *équilibre d'élasticité*, car je considère les pressions qui s'y trouvent effectivement exercées comme dépendant des petites déformations qu'éprouverait la masse, supposée d'abord homogène et sans poids, si elle devenait ensuite pesante comme elle l'est en effet.

2. Est-il aussi difficile qu'on l'a cru jusqu'ici de trouver les vraies formules des pressions, à l'intérieur d'un milieu pulvérulent en équilibre stable? Je ne le pense pas, et, sauf les réserves nécessaires en attendant le contrôle de l'expérience, qui, dès à présent d'accord avec une partie des résultats théoriques, n'a pas encore donné sa réponse sur d'autres, les réflexions suivantes me paraissent de nature à le démontrer.

Équations différentielles de l'équilibre d'élasticité des masses inconsistantes.

Les corps dont il s'agit tiennent le milieu entre les solides et les fluides : tandis que les solides et les fluides, soumis à des pressions variables depuis zéro jusqu'à de grandes valeurs, opposent à une même déformation qu'on leur fait subir une résistance constante, finie pour les premiers, nulle pour les seconds, les milieux pulvérulents, au contraire, résistent aux changements de forme avec une énergie d'autant plus grande qu'ils supportent dans

Digitized by Google

tous les sens une pression moyenne plus considérable : fluides tant qu'on ne les comprime pas, ils deviennent, en quelque sorte, solides sous pression. Leur coefficient d'élasticité de glissement, ou *coefficient de rigidité* (μ de Lamé), au lieu d'être constant comme chez les solides, nul comme chez les fluides, paraît proportionnel à la pression moyenne p.

C'est ce que je déduis en effet des expressions par lesquelles on représente, dans les corps isotropes, la moyenne des forces élastiques principales (c'est-à-dire la pression moyenne p changée de signe) et aussi les différences respectives de ces trois forces, en fonction des trois dilatations principales ∂_1, ∂_2, ∂_3. En tenant compte, dans tous les résultats, des termes affectés des carrés et des produits deux à deux de ∂_1, ∂_2, ∂_3, puis exprimant que le milieu considéré, pour des valeurs finies de ∂_1, ∂_2, ∂_3, cesse d'admettre des forces élastiques tangentielles de grandeur sensible dès que la pression moyenne p est nulle, je trouve que les composantes appelées par Lamé N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 y ont pour valeurs (tant qu'elles ne dépassent pas certaines limites) :

$$N_1 = -p\left(1 - 2m\frac{du}{dx}\right),\quad N_2 = -p\left(1 - 2m\frac{dv}{dy}\right),\quad N_3 = -p\left(1 - 2m\frac{dw}{dz}\right),$$

$$T_1 = pm\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right),\quad T_2 = pm\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right),\quad T_3 = pm\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right);$$

m est un coefficient positif et constant assez considérable, et u, v, w, fonctions des coordonnées primitives x, y, z, désignent les composantes du déplacement moléculaire. De plus, la même analyse prouve que la dilatation cubique est en même temps négligeable en comparaison des trois dilatations linéaires dont elle égale sensiblement la somme algébrique, ou qu'on peut admettre la relation d'incompressibilité

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Si l'on joint celle-ci aux trois équations qui expriment l'équilibre de translation d'un élément de volume rectangulaire, on aura les quatre équations

Digitized by Google

indéfinies nécessaires pour déterminer, dans chaque cas, les déplacements u, v, w et la pression moyenne p.

Quant aux conditions spéciales aux *surfaces-limites*, elles reviennent :

1° Pour les surfaces libres, à exprimer que la pression exercée par le massif sur sa couche superficielle est nulle (car on fait abstraction de la pression atmosphérique, appliquée tout autour de chaque *grain* de sable et qui n'influe pas sur les actions mutuelles de ces grains);

2° Pour les parois fixes (ou faces postérieures des murs de soutènement) à y poser $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ lorsqu'elles sont rugueuses au point d'immobiliser la couche adjacente du massif, comme il arrive toujours dans la pratique, et qu'on admet en outre l'existence d'un état primitif, compatible avec cette immobilité, dans lequel les déplacements u, v, w sont partout nuls et le milieu homogène sans pesanteur : si la paroi était, au contraire, infiniment polie, la composante normale du déplacement et les composantes tangentielles de la poussée s'y annuleraient.

Je me borne à considérer ces deux espèces opposées de parois et j'observe d'ailleurs que les conditions simples ainsi posées ne sont malheureusement pas applicables aux cas de la pratique. En effet, les particules adjacentes à des parois rugueuses, par exemple, se trouvent bien immobilisées, mais pas, en général, dans les positions correspondantes à l'état dit *naturel* ou primitif; de sorte que les déplacements u, v, w y sont plutôt égaux à des fonctions déterminées, quoique inconnues, de x, y, z, qu'à zéro. On verra au § VIII comment, dans l'étude de l'équilibre *définitif* que prennent des massifs placés dans des conditions données, j'ai pu suppléer par une condition de stabilité à la connaissance des relations spéciales aux parois, et comment aussi le même genre de solution, étendu au cas de murs plus ou moins fermes et qu'on ne peut pas supposer absolument immobiles, paraît conduire d'une manière rationnelle aux résultats que l'ingénieur demande à la théorie de la poussée des terres.

3. Les intégrations sont faciles quand le massif pesant, limité supérieurement par un plan faisant avec l'horizon un angle donné ω, est indéfini dans tous les autres sens. Une telle masse pulvérulente peut présenter une double

Leur intégration, pour un massif limité supérieurement par un talus plan, mais indéfini dans les autres sens.


Digitized by Google

infinité de modes d'équilibre, suivant les valeurs qu'on attribue à deux constantes arbitraires c, c', introduites par l'intégration.

Un système quelconque de droites parallèles, situées dans un plan vertical perpendiculaire au plan du talus supérieur, s'y change, par suite des petites déformations éprouvées, en une famille de coniques concentriques, semblables et semblablement placées, dont les axes ont les directions des bissectrices des quatre angles que forme une verticale avec le profil du talus supérieur. Ces coniques deviennent des arcs de cercle de très-grand rayon pour les lignes parallèles au talus. Elles se réduisent toutes à de simples droites parallèles quand l'une des deux constantes arbitraires, c, est nulle. Alors les différentes parties du massif éprouvent les mêmes déformations : il y a notamment deux systèmes primitivement rectangulaires de droites matérielles qui ne sont ni contractées, ni dilatées, et qui, sans cesser d'être droites et respectivement parallèles, éprouvent de simples glissements les unes par rapport aux autres. J'appelle ε l'inclinaison d'un système de ces lignes sur la verticale, inclinaison qu'on peut supposer comprise entre $\mp \frac{\pi}{4}$, et qui suffit, comme on va voir, pour caractériser parfaitement les divers modes *réalisables* d'équilibre du massif.

Limite d'élasticité de la matière pulvérulente. – Extension des résultats obtenus à des cas nombreux de massifs limités par des murs plans.

4. Observons, en effet, qu'après avoir intégré les équations différentielles du problème, il reste à tenir compte des limites d'élasticité que présente nécessairement la matière pulvérulente considérée. De même qu'en traitant de l'élasticité des solides soumis à des forces données, on exprime que la plus grande dilatation linéaire en chaque point doit rester inférieure à la valeur pour laquelle les déformations commenceraient à avoir une partie permanente sensible, de même il faut exprimer ici que la plus grande dilatation linéaire éprouvée aux divers points du massif atteint tout au plus la valeur maxima qui ne peut être dépassée sans qu'un éboulement soit à craindre. Les corps pulvérulents sont dénués de cohésion, c'est-à-dire incapables d'exercer des pressions négatives (ou *tractions*), et la dilatation la plus grande, à l'état élastique, doit par ce seul fait y rester toujours inférieure au rapport $\frac{1}{2m}$. La limite d'élasticité, étant ainsi moindre que $\frac{1}{2m}$, peut être mise sous la forme $\frac{\sin\varphi}{2m}$, où φ désigne un angle, caractéristique de chaque espèce de

Digitized by Google

matière, que l'expérience sera appelée à déterminer entre 0° et 90°, et qui n'est autre que l'angle dit *de frottement* ou *de terre coulante*. D'ailleurs, aux points d'un massif, soumis à des déformations planes, où la plus grande dilatation devient égale à $\frac{\sin\varphi}{2m}$, la plus grande inclinaison qu'y prenne une pression par rapport au prolongement de la normale à l'élément plan sur lequel elle s'exerce vaut précisément φ, et l'on retrouve l'équation caractéristique de l'équilibre-limite, que M. Rankine (*) a donnée le premier en la déduisant de cette propriété même prise pour définition des masses inconsistantes : elle se présente ici comme résultant du fait général de l'imperfection d'élasticité de tous les corps que l'on déforme.

Une première conséquence de la nouvelle condition imposée à l'équilibre est de faire annuler la constante c dont il a été parlé plus haut, et par conséquent de réduire tous les modes réalisables d'équilibre du massif indéfini à ceux qui dépendent d'un seul paramètre, fonction de l'autre constante arbitraire c' : je prends pour ce paramètre, comme il a été dit précédemment, l'inclinaison ε, sur la verticale, d'un des systèmes des lignes matérielles du massif qui ne sont ni contractées, ni dilatées. En outre, l'angle ε doit vérifier l'inégalité

$$\cos^2(\omega - 2\varepsilon) > \frac{\sin^2\omega}{\sin^2\varphi}.$$

La direction du système considéré de lignes invariables, arbitraire quand l'inclinaison ω du talus sur l'horizon est nulle, se trouve donc astreinte à tomber dans l'intérieur d'un angle de plus en plus petit à mesure que cette inclinaison croît en valeur absolue : elle devient même unique lorsque $\omega = \pm\varphi$, et elle cesse d'exister ou d'être réelle si ω sort de l'intervalle compris entre ces valeurs extrêmes $\pm\varphi$.

Ainsi sont expliquées :

1° L'impossibilité, pour un massif pulvérulent, de se soutenir sous un angle supérieur à celui de terre coulante;

2° La diminution de la stabilité de son équilibre à mesure que la déclivité du talus augmente, ou, ce qui revient au même, la réduction de plus en plus

(*) Mémoire déjà cité *On the stability of loose Earth,* form. 34.

Digitized by Google

grande du *champ* dans l'étendue duquel le paramètre angulaire ϵ, caractéristique des modes d'équilibre, peut varier sans que la masse inconsistante passe à l'état ébouleux.

D'ailleurs, ces divers modes d'équilibre, quoique obtenus pour des massifs latéralement indéfinis, s'appliquent à des massifs limités d'un côté par un mur, toutes les fois que les formules qui les représentent vérifient d'elles-mêmes les conditions spéciales à sa face postérieure. Je démontre par exemple qu'un de ces modes, et un seul, convient au cas d'un massif terminé supérieurement par un talus plan et latéralement par un mur également plan, soit quand ce mur se trouve, ou infiniment rugueux, ou infiniment poli, et que l'état naturel est supposé avoir existé d'abord, soit dans le cas ordinaire où l'équilibre s'est définitivement réglé de manière à donner à la structure intérieure du massif la plus grande stabilité compatible avec le degré de résistance du mur, soit enfin quand celui-ci est maintenu contre le massif au moyen d'une force connue, plus ou moins grande, comprise entre celle qui serait à peine suffisante pour soutenir les terres et celle qui les ferait refluer par écrasement au-dessus du talus supérieur. Les lois très-simples qui régissent, dans ces différents cas, les déformations élastiques éprouvées par le massif et la poussée qu'il exerce, se trouvent exposées aux §§ V, VII et VIII.

Digitized by Google

§ I.

FORMULES DES PRESSIONS PRINCIPALES EXERCÉES A L'INTÉRIEUR DES MILIEUX ÉLASTIQUES, SOLIDES, FLUIDES OU PULVÉRULENTS, DONT LA CONSTITUTION EST LA MÊME EN TOUT SENS.

—

5. Tous les corps *assez peu écartés d'un état d'équilibre primitif* sont *élastiques*, c'est-à-dire *tels, que la pression exercée à travers un élément plan quelconque pris à leur intérieur ne dépend que des déformations éprouvées par la matière dans une très-petite étendue autour de l'élément plan.* Quelque compliqués que soient les déplacements des diverses particules du corps, pourvu qu'on les suppose graduellement variables d'une particule aux particules voisines, les déformations dont il s'agit se réduisent toujours, comme on sait, aux trois dilatations, dites *principales*, des fibres ou lignes matérielles qui, primitivement parallèles à trois directions rectangulaires, se trouvent encore rectangulaires après les déplacements. Dilatations principales en chaque point d'un corps déformé

On peut démontrer bien simplement cette importante proposition, due à Cauchy. Il suffit, pour cela, d'observer que la continuité supposée des mouvements entraîne, comme conséquences presque évidentes, les propositions que je vais énoncer et qui constituent elles-mêmes d'intéressants théorèmes de cinématique.

1° Un ensemble de points matériels très-rapprochés et dessinant une surface dans l'état primitif, continuent à former une surface à toute époque.

2° Deux de ces surfaces matérielles, choisies primitivement très-voisines l'une de l'autre dans toute leur étendue, restent également très-voisines et ont par suite leurs éléments plans sensiblement égaux et parallèles chacun à chacun.

3° Un triple système de surfaces matérielles, tracées à l'origine dans le

Digitized by Google

corps, le découpe à toute époque en une infinité de parallélipipèdes élémentaires, dont chacun éprouve d'un instant à l'autre des variations dans les longueurs et dans les inclinaisons respectives de ses arêtes, mais sans que celles-ci cessent jamais d'être sensiblement égales et parallèles quatre à quatre.

4° Par suite, deux éléments matériels quelconques de surface ou de ligne, très-voisins l'un de l'autre, et sensiblement égaux et parallèles dans l'état primitif, ne cessent jamais d'être sensiblement plans ou rectilignes, égaux et parallèles.

5° Le mode de déformation éprouvé par le corps dans un petit espace autour d'un quelconque de ses points est complétement déterminé, si l'on connaît à chaque instant les accroissements reçus, à partir de l'état primitif, par les inclinaisons respectives de trois arêtes concourantes d'un élément de volume parallélipipède contenant ce point, et aussi les trois dilatations éprouvées par ces arêtes, c'est-à-dire les rapports respectifs de leurs augmentations de longueur aux longueurs primitives : en effet, l'élément de volume parallélipipède, dont l'état primitif est supposé donné en outre, pourra être entièrement construit à l'époque considérée, et tous les points matériels qu'il contient s'y trouveront situés, sans la moindre indétermination, de manière que leurs distances à chaque face, mesurées dans le sens de l'arête non parallèle à cette face, aient crû proportionnellement à leurs valeurs primitives également données.

6° Tout élément plan matériel primitivement limité par un contour elliptique, et tout petit volume ayant initialement la forme d'un ellipsoïde, ne cessent pas d'être, soit une ellipse, soit un ellipsoïde, dont les diamètres conjugués sont constamment formés par les mêmes lignes matérielles. Considérons, en effet, un parallélipipède élémentaire ayant deux ou trois arêtes parallèles, dans l'état primitif, à un système de diamètres conjugués de l'ellipse ou de l'ellipsoïde dont il s'agit, et appelons ∂_x, ∂_y, ou ∂_x, ∂_y, ∂_z, les dilatations de ces arêtes à une époque quelconque t. Menons, par le point matériel primitivement placé au centre de l'ellipse ou de l'ellipsoïde, un système d'axes des x, y, ou des x, y, z, qui restent constamment parallèles à ces arrêtes. Les coordonnées x', y', z' d'un point matériel quelconque, voisin de l'ori-

gine, égaleront, à une époque aussi quelconque, leurs valeurs primitives x, y, z augmentées des accroissements respectifs $x\partial_x$, $y\partial_y$, $z\partial_z$, et l'on aura

$$x' = x(1+\partial_x), \quad y' = y(1+\partial_y), \quad z' = z(1+\partial_z);$$

si donc le point (x, y), ou (x, y, z), est pris sur l'ellipse ou sur l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

le point (x', y') ou (x', y', z') se trouvera sur l'ellipse ou sur l'ellipsoïde

$$\frac{x'^2}{a^2(1+\partial_x)^2} + \frac{y'^2}{b^2(1+\partial_y)^2} = 1, \quad \frac{x'^2}{a^2(1+\partial_x)^2} + \frac{y'^2}{b^2(1+\partial_y)^2} + \frac{z'^2}{c^2(1+\partial_z)^2} = 1.$$

7° Le cas particulier le plus intéressant de la proposition précédente s'obtient en supposant l'élément plan et l'élément de volume considérés circulaire ou sphérique dans l'état primitif, c'est-à-dire tels, qu'ils aient, dans cet état, tous leurs systèmes de diamètres conjugués rectangulaires : quelle que soit, à une autre époque donnée, l'orientation du système, généralement unique, des axes de l'ellipse ou de l'ellipsoïde, les lignes matérielles dirigées suivant ces axes auront été rectangulaires dans l'état primitif, et les déformations totales éprouvées à cette époque par la matière comprise à l'intérieur de l'ellipse ou de l'ellipsoïde considérés, se trouveront parfaitement symétriques de part et d'autre des mêmes axes, s'il s'agit de l'ellipse, ou de part et d'autres des trois plans diamétraux, dits *principaux*, qui contiennent deux d'entre eux, s'il s'agit de l'ellipsoïde. En nous bornant à ce dernier cas de l'ellipsoïde, nous pourrons dire que les couches de matière parallèles à chacun des trois éléments plans principaux n'auront pas glissé les unes devant les autres, vu que les fibres matérielles qui les traversaient normalement leur seront encore perpendiculaires. Les déformations éprouvées se réduisent ainsi aux trois dilatations reçues par ces trois systèmes de fibres, c'est-à-dire, plus simplement, par les trois dimensions du parallélipipède matériel et rectangle construit sur trois arêtes parallèles aux axes considérés.

J'appellerai ∂_1, ∂_2, ∂_3 ces dilatations principales.

Digitized by Google

Expressions des forces élastiques principales dans un corps *isotrope* ou d'élasticité constante.

6. Je me bornerai à l'étude de corps d'*élasticité constante*, c'est-à-dire constitués, dans l'état primitif, de la même manière par rapport à tous les éléments plans matériels qui se croisent en un même point. Si l'on considère en particulier, parmi ces éléments plans, les trois qui sont rectangulaires à l'époque t comme avant les déplacements, les pressions F_1, F_2, F_3 qu'ils supporteront sous l'unité de surface actuelle, à cette époque t, ne pourront que leur être normales par raison de symétrie : ce sont ces trois pressions, rectangulaires entre elles et normales aux éléments plans qu'elles sollicitent, qu'on appelle *pressions principales :* nous les regarderons, suivant l'usage, comme positives quand ce seront des *tractions*, comme négatives quand ce seront des *pressions proprement dites*. D'ailleurs, pour des raisons encore évidentes de symétrie, si ∂_1, ∂_2, ∂_3 représentent les dilatations des fibres respectivement parallèles à F_1, F_2, F_3, F_1 sera une fonction de ∂_1, ∂_2, ∂_3, symétrique par rapport à ∂_2, ∂_3; F_2 sera la même fonction de ∂_2, ∂_3, ∂_1, enfin F_3, la même fonction de ∂_1, ∂_2, ∂_3.

En général, les déformations principales ∂_1, ∂_2, ∂_3 sont assez petites pour que les fonctions F_1, F_2, F_3 puissent être développées, par la formule de Maclaurin, en séries très-rapidement convergentes procédant suivant leurs puissances entières et positives. Nous nous occuperons spécialement de la *pression moyenne* $-\frac{1}{3}(F_1 + F_2 + F_3)$, que nous appellerons p, et des trois demi-différences $\frac{1}{2}(F_2 - F_3)$, $\frac{1}{2}(F_3 - F_1)$, $\frac{1}{2}(F_1 - F_2)$. Ces quatre quantités deviendront évidemment des séries très-rapidement convergentes ordonnées suivant les puissances croissantes de ∂_1, ∂_2, ∂_3.

La première, p, sera symétrique par rapport à ∂_1, ∂_2, ∂_3 et aura, jusqu'aux termes du troisième degré exclusivement, un développement de la forme

$$-A - B(\partial_1 + \partial_2 + \partial_3) - (C + 2D)(\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2) - (B + 2C - 2D)(\partial_2\partial_3 + \partial_3\partial_1 + \partial_1\partial_2),$$

où A, B, C, D désigneront quatre coefficients dépendant de la nature du corps et de l'état primitif. On peut abréger cette expression en y introduisant la dilatation cubique θ, c'est-à-dire l'accroissement reçu par l'unité de volume de l'élément matériel rectangulaire dont les trois dimensions ont grandi dans les rapports respectifs de 1 à $1 + \partial_1$, de 1 à $1 + \partial_2$, de 1 à

Digitized by Google

$1 + \partial_3$. La valeur de θ est ainsi l'excès, sur l'unité, du produit $(1 + \partial_1)$ $(1 + \partial_2)$ $(1 + \partial_3)$, et l'on peut, en négligeant le terme $\partial_1\partial_2\partial_3$ qui est du troisième ordre de petitesse, écrire

$$(1). \quad \ldots \quad \theta = (\partial_1 + \partial_2 + \partial_3) + (\partial_2\partial_3 + \partial_3\partial_1 + \partial_1\partial_2).$$

L'expression précédente de p, changée de signe, devient

$$(2). \quad -p \text{ ou } \frac{1}{3}(F_1 + F_2 + F_3) = A + B\theta + C\theta^2 + D\left[(\partial_2 - \partial_3)^2 + (\partial_3 - \partial_1)^2 + (\partial_1 - \partial_2)^2\right].$$

Le développement de $\frac{1}{2}(F_2 - F_3)$ peut s'obtenir en substituant aux deux variables ∂_2, ∂_3 les expressions équivalentes $\frac{1}{2}(\partial_2 + \partial_3) + \frac{1}{2}(\partial_2 - \partial_3)$ et $\frac{1}{2}(\partial_2 + \partial_3) - \frac{1}{2}(\partial_2 - \partial_3)$: on peut, en d'autres termes, l'ordonner suivant les puissances de ∂_1, $\partial_2 + \partial_3$, $\partial_2 - \partial_3$. Comme d'ailleurs le changement de ∂_2 en ∂_3 et de ∂_3 en ∂_2 transforme F_2 en F_3 et F_3 en F_2, cette série devra simplement changer de signe quand, ∂_1 et $\partial_2 + \partial_3$ conservant les mêmes valeurs, $\partial_2 - \partial_3$ prendra signe contraire. La série ne contient donc que les termes affectés des puissances impaires de $\partial_2 - \partial_3$; elle est le produit du facteur $\partial_2 - \partial_3$ par un autre facteur ordonné suivant les puissances entières et positives de ∂_1, $\partial_2 + \partial_3$, $(\partial_2 - \partial_3)^2$. Cet autre facteur, étant ainsi symétrique par rapport à ∂_2, ∂_3, contient, jusqu'aux termes du troisième degré exclusivement, sept termes, dont le premier est constant, et dont les six autres sont respectivement affectés de $\partial_2 + \partial_3$, ∂_1, $\partial_2^2 + \partial_3^2$, $\partial_1(\partial_2 + \partial_3)$, $\partial_2\partial_3$, ∂_1^2. Si A', B', C', D', B'', C'', D'' désignent des coefficients spécifiques comme A, B, C, D, ce facteur pourra s'écrire

$$\begin{aligned} &A' + B'(\partial_2 + \partial_3) + (C' + 2D')(\partial_2^2 + \partial_3^2) + (B' + 2C' - 2D')\partial_2\partial_3 + (B' + B'')\partial_1 \\ &\quad + (B' + 2C' - 2D' + C'')\partial_1(\partial_2 + \partial_3) + (C' + 2D' + C'' + D'')\partial_1^2, \end{aligned}$$

ou, plus simplement,

$$A' + B'\theta + C'\theta^2 + D'\left[(\partial_2 - \partial_3)^2 + (\partial_3 - \partial_1)^2 + (\partial_1 - \partial_2)^2\right] + (B'' + C''\theta)\partial_1 + D''\partial_1^2.$$

En vue d'abréger, je poserai dans ce paragraphe

$$(3). \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} &A + B\theta + C\theta^2 + D\left[(\partial_2 - \partial_3)^2 + (\partial_3 - \partial_1)^2 + (\partial_1 - \partial_2)^2\right] = K, \\ &A' + B'\theta + C'\theta^2 + D'\left[(\partial_2 - \partial_3)^2 + (\partial_3 - \partial_1)^2 + (\partial_1 - \partial_2)^2\right] = K', \end{aligned} \right.$$

Digitized by Google

de manière à avoir notamment, pour l'expression de $\frac{1}{2}(F_2 - F_3)$ et pour les expressions analogues de $\frac{1}{2}(F_3 - F_1)$ et de $\frac{1}{2}(F_1 - F_2)$, les formules

$$\frac{1}{2}(F_2 - F_3) = [K' + (B'' + C''\theta)\partial_1 + D''\partial_1^2](\partial_2 - \partial_3),$$

$$\frac{1}{2}(F_3 - F_1) = [K' + (B'' + C''\theta)\partial_2 + D''\partial_2^2](\partial_3 - \partial_1),$$

$$\frac{1}{2}(F_1 - F_2) = [K' + (B'' + C''\theta)\partial_3 + D''\partial_3^2](\partial_1 - \partial_2).$$

En ajoutant membre à membre ces trois égalités, il vient

$$0 = D''\left[\partial_1^2(\partial_2 - \partial_3) + \partial_2^2(\partial_3 - \partial_1) + \partial_3^2(\partial_1 - \partial_2)\right],$$

ou

$$0 = D''\left[\partial_2\partial_3(\partial_2 - \partial_3) + \partial_3\partial_1(\partial_3 - \partial_1) + \partial_1\partial_2(\partial_1 - \partial_2)\right],$$

relation qui ne peut être toujours vérifiée [comme, par exemple, dans le cas où $\partial_1 = 0$, sans qu'aucune des quantités ∂_2, ∂_3, $\partial_2 - \partial_3$ s'annule] qu'autant que le coefficient D'' est nul. Les formules ci-dessus, en y joignant celle (2) de la pression moyenne, se réduisent donc à celles-ci

$$(4) \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}(F_2 - F_3) = \left[K' + (B'' + C''\theta)\partial_1\right](\partial_2 - \partial_3), \\ &\frac{1}{2}(F_3 - F_1) = \left[K' + (B'' + C''\theta)\partial_2\right](\partial_3 - \partial_1), \\ &\frac{1}{2}(F_1 - F_2) = \left[K' + (B'' + C''\theta)\partial_3\right](\partial_1 - \partial_2), \\ &\frac{1}{3}(F_1 + F_2 + F_3) \quad \text{ou} \quad -p = K. \end{aligned}\right.$$

Ce que deviennent ces expressions : 1° Quand le corps est solide,

7. Les résultats précédents s'appliquent à tout corps d'élasticité constante, ou *isotrope,* comme dit Cauchy. Spécifions-les actuellement pour les trois cas d'un *solide,* d'un *fluide* et d'une *masse pulvérulente,* en supposant les parties variables, $F_1 - A$, $F_2 - A$, $F_3 - A$, des forces principales, assez peu considérables pour que leurs expressions soient réductibles aux formes simples qu'elles ont quand elles sont près de s'annuler.


Digitized by Google

La partie commune, $-p$, des trois pressions (ou plutôt tractions) F_1, F_2, F_3, représente l'effort qui tend à dilater ou à comprimer le corps, non celui qui tend à le déformer. Ce dernier effort est au contraire représenté par leurs différences respectives $F_2 - F_3, F_3 - F_1, F_1 - F_2$, et il est d'autant plus faible, en comparaison des déformations produites $\partial_2 - \partial_3$, $\partial_3 - \partial_1$, $\partial_1 - \partial_2$, que le corps a moins de *rigidité*.

Occupons-nous d'abord des *solides*, ou *milieux cohérents* proprement dits, c'est-à-dire des corps dont les déformations $\partial_2 - \partial_3, \partial_3 - \partial_1, \partial_1 - \partial_2$ ne deviennent jamais sensibles qu'autant que les efforts $F_2 - F_3, F_3 - F_1, F_1 - F_2$ le deviennent eux-mêmes. Les rapports

$$\frac{\partial_2 - \partial_3}{\frac{1}{2}(F_2 - F_3)}, \quad \frac{\partial_3 - \partial_1}{\frac{1}{2}(F_3 - F_1)}, \quad \frac{\partial_1 - \partial_2}{\frac{1}{2}(F_1 - F_2)},$$

n'y croissent donc pas au delà de toute limite lorsque leurs dénominateurs diminuent jusqu'à zéro, et les rapports inverses, exprimés, d'après les trois premières formules (4), par

$$K' + (B'' + C''\theta)\partial_1, \quad K' + (B'' + C''\theta)\partial_2, \quad K' + (B'' + C''\theta)\partial_3,$$

n'y deviennent pas nuls quand F_1, F_2, F_3 se réduisent à leur partie primitive A, ou que $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ décroissent jusqu'à zéro. D'après l'expression (3) de K', ces rapports se réduisent alors à la constante A'. Celle-ci ayant donc une grandeur finie, les formules (4), pour des valeurs assez peu considérables de $F_1 - A, F_2 - A, F_3 - A$ et par suite de $\partial_1, \partial_2, \partial_3$, deviennent à fort peu près

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}(F_2 - F_3) = A'(\partial_2 - \partial_3), \quad \frac{1}{2}(F_3 - F_1) = A'(\partial_3 - \partial_1), \quad \frac{1}{2}(F_1 - F_2) = A'(\partial_1 - \partial_2), \\ \qquad -p \quad \text{ou} \quad \frac{1}{3}(F_1 + F_2 + F_3) = A + B\theta = A + B(\partial_1 + \partial_2 + \partial_3). \end{array}\right.$$

On en déduit aisément les valeurs de F_1, F_2, F_3, en observant qu'on a, par exemple,

$$F_1 = \frac{1}{3}(F_1 + F_2 + F_3) - \frac{1}{3}(F_3 - F_1) + \frac{1}{3}(F_1 - F_2);$$

si l'on pose, afin d'arriver aux notations de Lamé,

$$B - \frac{2}{3}A' = \lambda, \quad A' = \mu,$$

on obtient ainsi les formules connues

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad F_1 = A + \lambda\theta + 2\mu\partial_1, \quad F_2 = A + \lambda\theta + 2\mu\partial_2, \quad F_3 = A + \lambda\theta + 2\mu\partial_3.$$

2° Quand le corps est fluide et quand il est pulvérulent.

8. Les milieux *non cohérents* sont au contraire ceux chez lesquels des déformations finies $\partial_2 - \partial_3$, $\partial_3 - \partial_1$, $\partial_1 - \partial_2$ peuvent être produites par des efforts $F_2 - F_3$, $F_3 - F_1$, $F_1 - F_2$ infiniment petits. Ces milieux sont de deux espèces, suivant que de telles déformations, sous des efforts insensibles, n'y sont réalisables qu'autant que la pression moyenne p est infiniment petite, ou suivant qu'elles peuvent même s'effectuer quand la pression p est finie.

Le second cas est offert par les *fluides*, milieux, dénués de régidité, chez lesquels on a constamment (au moins à l'état *statique*) $F_2 - F_3 = 0$, $F_3 - F_1 = 0$, $F_1 - F_2 = 0$, et où par suite, si l'on suppose assez peu considérables, comme il a été dit, les différences $F_1 - A$, $F_2 - A$, $F_3 - A$, on a

$$F_1 = F_2 = F_3 = -p = A + B\theta:$$

ces formules se déduiraient de celles (5) qui conviennent aux corps solides, en supposant nul le *coefficient de rigidité* μ.

Le premier cas comprend les *corps pulvérulents* que j'étudierai dans ce Mémoire. On peut les définir des milieux élastiques intermédiaires, qui, sous pression, sont doués de rigidité comme les solides, tandis qu'*ils deviennent fluides dès qu'on cesse de les comprimer*.

Quelque faibles que soient les efforts $F_2 - F_3$, $F_3 - F_1$, $F_1 - F_2$, mais pourvu que la pression moyenne p devienne suffisamment petite, les dilatations ∂_1, ∂_2, ∂_3 peuvent y avoir des valeurs quelconques, que nous supposerons toutefois petites et comprises entre certaines limites d'élasticité. Or l'expression (4) de p devient égale à zéro, quelles que soient les différences $\partial_2 - \partial_3$, $\partial_3 - \partial_1$, si l'on y choisit convenablement θ ou, par exemple, l'une des trois dilatations ∂_1, ∂_2, ∂_3. Les formules (4) montrent donc que,

Digitized by Google

pour des valeurs arbitraires de $\partial_2 - \partial_3$, $\partial_3 - \partial_1$, les quatre expressions

$$(5^{bis}) \ldots \quad K, \quad K' + (B'' + C''\theta)\partial_1, \quad K' + (B'' + C''\theta)\partial_2, \quad K' + (B'' + C''\theta)\partial_3,$$

peuvent être nulles dans les milieux dont il s'agit, ou, plus exactement, peuvent être nulles en supposant qu'on y comprenne les termes, d'un ordre de petitesse en ∂_1, ∂_2, ∂_3 supérieur au second, qui les rendraient exactes. La différence des deux dernières étant $(B'' + C''\theta)(\partial_2 - \partial_3)$, on voit que l'annulation de ces quatre expressions revient à poser, sauf erreurs du troisième ordre de petitesse,

$$(6) \ldots \quad K = 0, \quad K' = 0, \quad B'' + C''\theta = \text{une quantité du second ordre en } \partial_1, \partial_2, \partial_3.$$

Nous aurons à considérer les trois équations simultanées (6), non pas pour nous borner aux cas où elles seront satisfaites, mais pour tirer de leur forme même diverses conséquences, relatives aux cas voisins où la pression moyenne p, sans devenir trop grande, ne sera plus égale à zéro. Elles devront être vérifiées, non-seulement par des valeurs finies de $\partial_1, \partial_2, \partial_3$, mais encore par des valeurs nulles de ∂_1, ∂_2, ∂_3; car, en admettant, comme je le ferai, qu'on ait choisi pour état primitif un état où $p = 0$, on peut, sans que les pressions F_1, F_2, F_3 cessent d'être insensibles, ne produire que des dilatations linéaires aussi petites qu'on voudra. Or, quand on fait $\partial_1 = 0$, $\partial_2 = 0$, $\partial_3 = 0$, ces équations se réduisent, d'après les expressions (3) de K, K', à

$$(7) \ldots \ldots \quad A = 0, \quad A' = 0, \quad B'' = 0.$$

Par suite, les équations (6) deviennent en général

$$(8) \ldots \left\{ \begin{array}{l} B\theta \;\; + C\theta^2 + D\,[(\partial_2 - \partial_3)^2 + (\partial_3 - \partial_1)^2 + (\partial_1 - \partial_2)^2] = 0, \\ B'\theta + C'\theta^2 + D'\,[(\partial_2 - \partial_3)^2 + (\partial_3 - \partial_1)^2 + (\partial_1 - \partial_2)^2] = 0, \\ C''\theta = \text{une quantité du second ordre en } \partial_1, \partial_2, \partial_3. \end{array} \right.$$

On ne peut les vérifier que de deux manières : ou bien en posant $\theta = 0$, ou bien sans poser $\theta = 0$. Examinons successivement ces deux cas.

Si les équations (8) se résolvent en posant $\theta = 0$, les deux premières,


Digitized by Google

dans lesquelles les petites différences $\partial_2 - \partial_3$, $\partial_3 - \partial_1$ doivent rester arbitraires, ne seront satisfaites qu'autant qu'on aura

$$(9) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad D = 0, \quad D' = 0.$$

Mais alors les formules générales (4) prennent des formes très-simples, quand on se borne, comme il a été dit, à n'étudier que des valeurs assez peu considérables des parties variables $F_1 - A$, $F_2 - A$, $F_3 - A$ des pressions. Pour toutes ces valeurs, la dilatation cubique θ, qui s'annulerait en même temps qu'elles, est en général très-petite par rapport aux trois termes principaux ∂_1, ∂_2, ∂_3, dont elle vaut à fort peu près la somme algébrique et qui, différant l'une de l'autre de quantités quelconques, sont loin de s'annuler. D'ailleurs, les expressions (4) de $-p$ et, par exemple, de $\frac{1}{2}(F_2 - F_3)$, sont déjà réduites, par les conditions (7) et (9), à

$$-p = B\theta + C\theta^2, \quad \frac{1}{2}(F_2 - F_3) = (B' + C'\theta + C''\partial_1)\,\theta\,(\partial_2 - \partial_3).$$

La dilatation θ étant très-petite par rapport aux différences $\partial_2 - \partial_3$, $\partial_3 - \partial_1$, un terme affecté de θ^2 est négligeable vis-à-vis d'un terme affecté de θ, vis-à-vis même d'un autre terme affecté de $\theta(\partial_2 - \partial_3)$, et l'on peut supprimer, à plus forte raison, un terme affecté, soit de $\theta\partial_1(\partial_2 - \partial_3)$, soit surtout de $\theta^2(\partial_2 - \partial_3)$. Les termes qui ont en coefficient C, C′, C″ disparaissent donc, et il vient simplement

$$-p = B\theta, \quad \frac{1}{2}(F_2 - F_3) = B'\theta\,(\partial_2 - \partial_3),$$

ou bien, si l'on pose $B = \lambda$, $B' = -m\lambda$,

$$-p = \lambda\theta, \quad \frac{1}{2}(F_2 - F_3) = mp\,(\partial_2 - \partial_3).$$

On aurait des valeurs analogues pour les demi-différences $\frac{1}{2}(F_3 - F_1)$, $\frac{1}{2}(F_1 - F_2)$: ces valeurs, substituées dans les expressions identiques de F_1, F_2, F_3, dont la première est

$$F_1 = -p - \frac{1}{3}(F_3 - F_1) + \frac{1}{3}(F_1 - F_2),$$

Digitized by Google

donnent, en observant que la somme $\partial_1 + \partial_2 + \partial_3$, ou θ, est négligeable en comparaison de $\partial_1, \partial_2, \partial_3$, les formules définitives :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_1 = -p(1-2m\partial_1), \quad F_2 = -p(1-2m\partial_2), \quad F_3 = -p(1-2m\partial_3), \\ \text{avec la condition } \partial_1 + \partial_2 + \partial_3 \quad \text{ou} \quad \theta = 0. \end{array} \right.$$

Supposons actuellement que les équations (8) se résolvent sans poser $\theta = 0$, mais dans l'hypothèse que θ y varie, à partir de zéro, d'une manière continue, à mesure que les deux différences $\partial_2 - \partial_3$, $\partial_3 - \partial_1$, d'abord nulles, prennent des valeurs croissantes. Les équations dont il s'agit se vérifiant quand la pression moyenne p égale zéro, il est clair que la dilatation cubique ne peut pas y avoir de valeurs bien sensibles et qu'elle y est tout au plus de l'ordre des carrés ou des produits de $\partial_1, \partial_2, \partial_3$, (si même il est physiquement admissible qu'elle puisse être finie). C'est du reste ce que montre la première relation (8), où B est l'inverse de ce qu'on appelle *coefficient de compressibilité,* et de laquelle on tire

$$\theta = -\frac{1}{B}\left\{C\theta^2 + D\left[(\partial_2-\partial_3)^2 + (\partial_3-\partial_1)^2 + (\partial_1-\partial_2)^2\right]\right\}.$$

Ainsi θ est seulement du second ordre de petitesse en $\partial_1, \partial_2, \partial_3$: par suite, θ^2 disparaît, comme se trouvant du quatrième ordre, des deux premières équations (8). De plus, au degré d'approximation auquel on se borne, la troisième équation (8) est vérifiée quel que soit le coefficient fini C''.

Les relations (8), ainsi réduites à

$$(11) \quad B\theta + D\left[(\partial_2-\partial_3)^2 + (\partial_3-\partial_1)^2 + (\partial_1-\partial_2)^2\right] = 0, \quad B'\theta + D'\left[(\partial_2-\partial_3)^2 + (\partial_3-\partial_1)^2 + (\partial_1-\partial_2)^2\right] = 0,$$

donnent par l'élimination de θ, en appelant $-m$ le rapport $\frac{D'}{D}$,

$$(12) \quad \ldots\ldots\ldots \quad B' = -mB, \quad D' = -mD.$$

Les formules générales (4) conduiront encore, dans le cas que nous examinons, aux mêmes relations (10) que dans le précédent, du moins tant qu'on supposera les parties variables, $F_1 - A$, $F_2 - A$, $F_3 - A$, des pres-

Digitized by Google

sions, assez petites pour que la dilatation cubique θ ne cesse pas d'être du second ordre de petitesse en $\partial_1, \partial_2, \partial_3$. Les conditions (7) et (12), si on néglige d'ailleurs dans une même formule, devant θ, les termes affectés de $\theta^2, \theta\partial_1, \theta\partial_2, \theta\partial_3$, changent en effet les relations (4) en celles-ci

$$(13) \begin{cases} \frac{1}{2}(F_2 - F_3) = mp(\partial_2 - \partial_3), \quad \frac{1}{2}(F_3 - F_1) = mp(\partial_3 - \partial_1), \quad \frac{1}{2}(F_1 - F_2) = mp(\partial_1 - \partial_2), \\ -p = B\theta + D\left[(\partial_2 - \partial_3)^2 + (\partial_3 - \partial_1)^2 + (\partial_1 - \partial_2)^2\right] : \end{cases}$$

les trois premières, combinées avec la condition approchée d'incompressibilité $\partial_1 + \partial_2 + \partial_3 = 0$, donnent bien les relations (10).

Les formules (10) *conviennent par conséquent à tous les milieux élastiques pulvérulents soumis à des pressions modérées. Elles diffèrent des formules* (5), *caractéristiques des corps solides, en ce que, d'une part, la dilatation cubique θ y est négligeable en comparaison des dilatations linéaires $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ dont elle vaut sensiblement la somme algébrique, tandis que, d'autre part, le coefficient de rigidité μ, au lieu d'être constant, y prend la forme mp, c'est-à-dire devient proportionnel à la pression moyenne exercée au point considéré.*

Les relations qui existent, dans ces deux espèces de corps, entre les actions déformatrices $F_2 - F_3$, $F_3 - F_1$, $F_1 - F_2$ et les déformations produites $\partial_2 - \partial_3$, $\partial_3 - \partial_1$, $\partial_1 - \partial_2$, se déduisent immédiatement des formules (5) ou (10), et sont les suivantes :

$$(14) \ldots \frac{\frac{1}{2}(F_2 - F_3)}{\partial_2 - \partial_3} = \frac{\frac{1}{2}(F_3 - F_1)}{\partial_3 - \partial_1} = \frac{\frac{1}{2}(F_1 - F_2)}{\partial_1 - \partial_2} = \begin{cases} \mu \text{ (si le corps est solide)}, \\ mp \text{ (s'il est pulvérulent)}. \end{cases}$$

Digitized by Google

§ II.

EXPRESSIONS GÉNÉRALES DES FORCES ÉLASTIQUES, A L'INTÉRIEUR DES CORPS D'ÉLASTICITÉ CONSTANTE, SOLIDES OU PULVÉRULENTS.

—

Expressions des dilatations et des glissements en fonction des dérivées partielles des déplacements.

9. Les formules des pressions principales F_1, F_2, F_3 en fonction des dilatations principales ∂_1, ∂_2, ∂_3 étant obtenues, il nous reste à chercher celles qui expriment les six composantes, N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 (notations de Lamé), des pressions exercées sur l'unité superficielle des trois éléments plans perpendiculaires à trois axes de coordonnées rectangles x, y, z, en fonction des trois dilatations ∂_x, ∂_y, ∂_z des lignes matérielles qui étaient primitivement parallèles à ces axes et des trois cosinus g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} (*glissements*) des angles que font, après les déformations, les mêmes lignes prises deux à deux.

J'appellerai :

1° x, y, z les coordonnées primitives de la particule matérielle à partir de laquelle sont menées ces trois petites lignes et où se croisent les éléments plans considérés;

2° u, v, w, fonctions continues de x, y, z, les déplacements suivant les axes, à l'époque t, de la même particule, c'est-à-dire les petits accroissements reçus à cette époque par les coordonnées primitives x, y, z;

3° x', y', z' ses coordonnées primitives par rapport à un autre système déterminé d'axes rectangles ayant la même origine, et que je supposerai, finalement, parallèles aux trois directions suivant lesquelles se sont produites les dilatations principales ∂_1, ∂_2, ∂_3 au point particulier considéré;

4° u', v', w' les déplacements, suivant ces nouveaux axes, de la même particule;

5° enfin, a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' les cosinus des angles que l'axe des x, l'axe des y, l'axe des z, font avec ces nouveaux axes des x', y', z'.

Si dx, dy, dz désignent les longueurs primitives de trois lignes matérielles infiniment petites, primitivement parallèles aux axes des x, y, z, et

Digitized by Google

menées à partir de la particule considérée, leurs projections sur ces axes, après les déplacements, seront respectivement devenues, comme on sait :

$$\left(1+\frac{du}{dx}\right)dx,\quad \frac{dv}{dx}dx,\quad \frac{dw}{dx}dx,\ \text{pour la première } dx,$$
$$\frac{du}{dy}dy,\quad \left(1+\frac{dv}{dy}\right)dy,\quad \frac{dw}{dy}dy\ \text{pour la deuxième } dy,$$
$$\frac{du}{dz}dz,\quad \frac{dv}{dz}dz,\quad \left(1+\frac{dw}{dz}\right)dz,\ \text{pour la troisième } dz.$$

Par suite, les dilatations de ces lignes, excès, sur l'unité, des rapports de leurs longueurs actuelles à leurs longueurs primitives, vaudront sensiblement

(15). . . . . $$\partial_x=\frac{du}{dx},\quad \partial_y=\frac{dv}{dy},\quad \partial_z=\frac{dw}{dz},$$

et les cosinus des angles qu'elles feront deux à deux seront, au même degré d'approximation,

(16) . . . . . $$g_{yz}=\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy},\quad g_{zx}=\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz},\quad g_{xy}=\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}.$$

Formules pour les transformations de coordonnées : 1° Transformation des dilatations et des glissements;

10. D'ailleurs, les formules connues de la transformation des coordonnées donnent :

$$x=ax'+by'+cz',\quad y=a'x'+b'y'+c'z',\quad z=a''x'+b''y'+c''z';$$
$$\frac{d}{dx}=a\frac{d}{dx'}+b\frac{d}{dy'}+c\frac{d}{dz'},\quad \frac{d}{dy}=a'\frac{d}{dx'}+b'\frac{d}{dy'}+c'\frac{d}{dz'},\quad \frac{d}{dz}=a''\frac{d}{dx'}+b''\frac{d}{dy'}+c''\frac{d}{dz'};$$
$$u=au'+bv'+cw',\quad v=a'u'+b'v'+c'w',\quad w=a''u'+b''v'+c''w'.$$

On en déduit immédiatement les relations suivantes :

$$\frac{du}{dx}=a^2\frac{du'}{dx'}+b^2\frac{dv'}{dy'}+c^2\frac{dw'}{dz'}+bc\left(\frac{dv'}{dz'}+\frac{dw'}{dy'}\right)+ca\left(\frac{dw'}{dx'}+\frac{du'}{dz'}\right)+ab\left(\frac{du'}{dy'}+\frac{dv'}{dx'}\right)$$
$$\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}=2\left(a'a''\frac{du'}{dx'}+b'b''\frac{dv'}{dy'}+c'c''\frac{dw'}{dz'}\right)+(b'c''+c'b'')\left(\frac{dv'}{dz'}+\frac{dw'}{dy'}\right)$$
$$+(c'a''+a'c'')\left(\frac{dw'}{dx'}+\frac{du'}{dz'}\right)+(a'b''+b'a'')\left(\frac{du'}{dy'}+\frac{dv'}{dx'}\right);$$
$$\frac{dv}{dy}=\cdots,\quad \frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}=\cdots;\quad \frac{dw}{dz}=\cdots,\quad \frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}=\cdots.$$

Digitized by Google

Or, par hypothèse, les axes des x', y', z' sont parallèles aux trois directions *principales*, pour lesquelles, au point particulier (x, y, z), les glissements ou cosinus $\frac{dv'}{dz'} + \frac{dw'}{dy'}$, $\frac{dw'}{dx'} + \frac{du'}{dz'}$, $\frac{du'}{dy'} + \frac{dv'}{dx'}$ sont nuls, tandis que les dilatations $\frac{du'}{dx'}$, $\frac{dv'}{dy'}$, $\frac{dw'}{dz'}$ ont été appelées ∂_1, ∂_2, ∂_3. Les formules précédentes deviennent donc simplement :

$$(17) \ldots \begin{cases} \partial_x = a^2\partial_1 + b^2\partial_2 + c^2\partial_3, \quad \partial_y = a'^2\partial_1 + b'^2\partial_2 + c'^2\partial_3, \quad \partial_z = a''^2\partial_1 + b''^2\partial_2 + c''^2\partial_3; \\ g_{yz} = 2(a'a''\partial_1 + b'b''\partial_2 + c'c''\partial_3), \quad g_{zx} = 2(a''a\partial_1 + b''b\partial_2 + c''c\partial_3), \quad g_{xy} = 2(aa'\partial_1 + bb'\partial_2 + cc'\partial_3). \end{cases}$$

Plusieurs conséquences utiles résultent de ces formules. Et d'abord, si l'on ajoute les trois expressions de ∂_x, ∂_y, ∂_z, il vient, à cause des relations connues qui existent entre les cosinus $a, a', a'', \ldots$, la formule

$$(18) \ldots \ldots \quad \partial_x + \partial_y + \partial_z = \partial_1 + \partial_2 + \partial_3 = \text{par suite } \theta.$$

Si, en outre, on retranche, par exemple, ∂_z de ∂_y et que, dans le résultat, on remplace a'^2, a''^2 par $1 - b'^2 - c'^2$, $1 - b''^2 - c''^2$, on trouve

$$(19) \ldots \begin{cases} \partial_y - \partial_z = (c'^2 - c''^2)(\partial_3 - \partial_1) - (b'^2 - b''^2)(\partial_1 - \partial_2); \\ \text{on aurait de même} \\ \partial_z - \partial_x = (a''^2 - a^2)(\partial_1 - \partial_2) - (c''^2 - c^2)(\partial_2 - \partial_3), \\ \partial_x - \partial_y = (b^2 - b'^2)(\partial_2 - \partial_3) - (a^2 - a'^2)(\partial_3 - \partial_1). \end{cases}$$

Enfin, en éliminant, au moyen de la relation

$$a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0,$$

$a'\,a''$ de l'expression (17) de g_{yz}, il vient

$$(20) \ldots \ldots \begin{cases} g_{yz} = 2c'c''(\partial_3 - \partial_1) - 2b'b''(\partial_1 - \partial_2); \\ \text{on aurait de même} \\ g_{zx} = 2a''a(\partial_1 - \partial_2) - 2c''c(\partial_2 - \partial_3), \\ g_{xy} = 2bb'(\partial_2 - \partial_3) - 2aa'(\partial_3 - \partial_1). \end{cases}$$

11. D'autre part, des relations bien connues, qu'on déduit de la considération de l'équilibre dynamique du tétraèdre élémentaire de Cauchy, fournissent les formules nécessaires pour la transformation des pressions N, T. 2° Transformation des forces élastiques.

Digitized by Google

Si p_x, p_y, p_z désignent les composantes, suivant les trois axes rectangulaires des x, y, z, de la pression exercée sur l'unité d'aire de l'élément plan quelconque dont la normale fait avec ces axes les angles α, β, γ, ces relations sont :

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_x = \mathrm{N}_1 \cos\alpha + \mathrm{T}_3 \cos\beta + \mathrm{T}_2 \cos\gamma, \\ p_y = \mathrm{T}_3 \cos\alpha + \mathrm{N}_2 \cos\beta + \mathrm{T}_1 \cos\gamma, \\ p_z = \mathrm{T}_2 \cos\alpha + \mathrm{T}_1 \cos\beta + \mathrm{N}_3 \cos\gamma. \end{array} \right.$$

Appliquées en prenant les composantes, $p_{x'}, p_{y'}, p_{z'}$, suivant le système particulier d'axes, des x', y', z', pour lequel les forces normales N deviennent $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \mathrm{F}_3$, tandis que les forces tangentielles T sont nulles, ces formules se réduisent à

$$(21^{bis}) \quad p_{x'} = \mathrm{F}_1 \cos\alpha', \quad p_{y'} = \mathrm{F}_2 \cos\beta', \quad p_{z'} = \mathrm{F}_3 \cos\gamma',$$

où j'appelle α', β', γ' les angles faits avec ces axes par la normale à l'élément plan considéré.

On aura les composantes, toujours suivant les axes des x', y', z', des pressions exercées sur les éléments plans normaux aux axes des x, y, z, en faisant successivement, dans (21bis) :

$$\cos\alpha' = a, \ = a', \ = a''; \quad \cos\beta' = b, \ = b', \ = b''; \quad \cos\gamma' = c, \ = c', \ = c''.$$

Les projections $\mathrm{N}_1, \mathrm{T}_3, \mathrm{T}_2$; $\mathrm{T}_3, \mathrm{N}_2, \mathrm{T}_1$; $\mathrm{T}_2, \mathrm{T}_1, \mathrm{N}_3$, suivant les x, y, z, des mêmes pressions, s'obtiendront ensuite en faisant la somme de ces composantes, respectivement multipliées par a, b, c, ou par a', b', c', ou par a'', b'', c''. Il vient ainsi :

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{N}_1 = a^2\mathrm{F}_1 + b^2\mathrm{F}_2 + c^2\mathrm{F}_3, \quad \mathrm{N}_2 = a'^2\mathrm{F}_1 + b'^2\mathrm{F}_2 + c'^2\mathrm{F}_3, \quad \mathrm{N}_3 = a''^2\mathrm{F}_1 + b''^2\mathrm{F}_2 + c''^2\mathrm{F}_3; \\ \mathrm{T}_1 = a'a''\mathrm{F}_1 + b'b''\mathrm{F}_2 + c'c''\mathrm{F}_3, \quad \mathrm{T}_2 = a''a\mathrm{F}_1 + b''b\mathrm{F}_2 + c''c\mathrm{F}_3, \quad \mathrm{T}_3 = aa'\mathrm{F}_1 + bb'\mathrm{F}_2 + cc'\mathrm{F}_3. \end{array} \right.$$

Ces formules sont pareilles à (17), et l'on en tirera de même des relations analogues à (18), (19), (20) :

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{N}_1 + \mathrm{N}_2 + \mathrm{N}_3 = \mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 + \mathrm{F}_3 = \text{par suite} - 3p; \\ \mathrm{N}_2 - \mathrm{N}_3 = (c'^2 - c''^2)(\mathrm{F}_3 - \mathrm{F}_1) - (b'^2 - b''^2)(\mathrm{F}_1 - \mathrm{F}_2), \quad \mathrm{N}_3 - \mathrm{N}_1 = \cdots, \quad \mathrm{N}_1 - \mathrm{N}_2 = \cdots; \\ \mathrm{T}_1 = c'c''(\mathrm{F}_3 - \mathrm{F}_1) - b'b''(\mathrm{F}_1 - \mathrm{F}_2), \quad \mathrm{T}_2 = \cdots, \quad \mathrm{T}_3 = \cdots \end{array} \right.$$

Digitized by Google

Formules des forces élastiques, pour les solides isotropes et pour les milieux pulvérulents.

12. Il suffit de comparer respectivement les expressions (23) de $N_2 - N_3$ et de T_1, à celles (19) de $\partial_y - \partial_z$ et (20) de g_{yz}, en tenant compte de l'égalité continue (14), pour voir que l'on a

$$\frac{\frac{1}{2}(N_2 - N_3)}{\partial_y - \partial_z} = \frac{T_1}{g_{yz}} = \begin{cases} \mu \text{ (si le corps est solide)}, \\ mp \text{ (s'il est pulvérulent)}; \end{cases}$$

les rapports

$$\frac{\frac{1}{2}(N_3 - N_1)}{\partial_z - \partial_x}, \quad \frac{T_2}{g_{zx}}, \quad \frac{\frac{1}{2}(N_1 - N_2)}{\partial_x - \partial_y}, \quad \frac{T_3}{g_{xy}},$$

égaleront de même μ ou mp.

De là résultent immédiatement les valeurs cherchées de T_1, T_2, T_3, ainsi que celles des différences $N_2 - N_3$, $N_3 - N_1$, $N_1 - N_2$. Quant aux expressions même de N_1, N_2, N_3, des identités dont la première est

$$N_1 = \frac{1}{3}(N_1 + N_2 + N_3) - \frac{1}{3}(N_3 - N_1) + \frac{1}{3}(N_1 - N_2)$$

les donnent ensuite, si l'on observe que, d'après une relation (23), la force normale moyenne $\frac{1}{3}(N_1 + N_2 + N_3)$ est égale à la moyenne arithmétique $-p$ des trois pressions principales et a pour valeur, dans le cas d'un solide isotrope (voir form. 5), $A + (\lambda + \frac{2}{3}\mu)\theta$. En tenant compte de (18), on trouve ainsi, dans ce cas, les formules bien connues :

$$(24)\ldots \begin{cases} N_1 = A + \lambda\theta + 2\mu\partial_x, & N_2 = A + \lambda\theta + 2\mu\partial_y, & N_3 = A + \lambda\theta + 2\mu\partial_z, \\ T_1 = \mu g_{yz}, & T_2 = \mu g_{zx}, & T_3 = \mu g_{xy}, \\ \text{où, d'après (18),} & \theta = \partial_x + \partial_y + \partial_z. \end{cases}$$

Si, au contraire, le corps est pulvérulent, cas dans lequel nous avons vu que la dilatation cubique θ peut être négligée, il vient

$$(25)\ldots \begin{cases} N_1 = -p(1 - 2m\partial_x), & N_2 = -p(1 - 2m\partial_y), & N_3 = -p(1 - 2m\partial_z), \\ T_1 = pmg_{yz}, & T_2 = pmg_{zx}, & T_3 = pmg_{xy}, \\ \text{avec la condition } \theta \text{ ou } & \partial_x + \partial_y + \partial_z = 0. \end{cases}$$

On pourra, dans l'un et dans l'autre cas, substituer aux six déformations ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} leurs expressions approchées (15) et (16) en fonction des dérivées partielles des déplacements u, v, w par rapport aux coordonnées primitives x, y, z.

Digitized by Google

§ III.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE L'ÉQUILIBRE D'ÉLASTICITÉ DES MASSIFS PULVÉRULENTS.

Considérations préliminaires.

13. Je m'occuperai principalement, dans la suite de cette étude, de l'équilibre de massifs pesants, tels qu'un monceau de sable, formés de très-petits grains solides juxtaposés sans cohésion, mais se comprimant mutuellement. On pourra faire abstraction de la pression atmosphérique, appliquée normalement à tout élément plan pris au sein d'un pareil massif; car cette pression, qui existe en tous sens à l'intérieur et tout autour des divers grains, avant même qu'on les rapproche, et aussi dans l'air interposé, n'a aucun effet pour les maintenir serrés les uns contre les autres et par suite ne modifie nullement les deux pressions supplémentaires, normale et tangentielle, que le contact des grains produit généralement sur l'unité d'aire de l'élément plan. Ces pressions supplémentaires seront les seules que nous aurons à considérer, celles auxquelles nous appliquerons les formules établies ci-dessus et notamment les relations générales (21).

Nous supposerons d'abord le massif sans pesanteur, libre, en chaque point, de toute pression, et nous prendrons pour coordonnées primitives x, y, z de ses diverses particules, par rapport à un système d'axes rectangulaires fixes, les coordonnées qu'elles auraient dans cet état de repos, dit *état naturel;* puis nous concevrons qu'il devienne pesant, et nous nous proposerons de déterminer les petits déplacements u, v, w qu'auront éprouvés ses diverses parties quand un nouvel équilibre, que nous supposerons d'abord possible dans ces conditions, se sera établi.

Si les limites d'élasticité du massif ne sont pas dépassées, comme nous l'admettrons, les formules (25), spéciales aux corps pulvérulents, devront s'y appliquer; car les hypothèses, faites pour les établir, d'une égale constitution en tout sens et d'une rigidité nulle ou finie suivant que la pression

Digitized by Google

moyenne l'est elle-même, conviennent précisément aux masses dont il s'agit. L'expérience montre que les actions tangentielles T sont généralement de l'ordre de grandeur des actions normales N, ou de la pression moyenne p; d'où il suit que le coefficient numérique et positif m est assez grand pour que ses produits par les petites déformations ∂, g aient des valeurs comparables à l'unité. Nous supposerons d'ailleurs m constant, ce qui revient à admettre l'homogénéité du massif, c'est-à-dire la parité de composition de toutes ses parties d'étendue notable.

Équations indéfinies de l'équilibre. — Cas des déformations planes.

14. Cherchons d'abord les équations indéfinies de l'équilibre. Tous les termes que contiennent les expressions (25) des forces N, T ont linéairement en facteur les petites déformations ∂, g, à l'exception du terme $-p$, qui paraît dans N_1, N_2, N_3, mais qui est seulement comparable aux autres, comme il vient d'être dit. On peut donc, en comparaison des dérivées en x, y, z des forces N, T, négliger les produits de ces dérivées par celles des petits déplacements u, v, w et réduire par suite, ainsi qu'on le fait d'ordinaire dans la théorie de l'élasticité des corps solides, les conditions qui expriment l'équilibre de translation d'un élément de volume rectangulaire aux formules connues

$$(26)\quad \frac{dN_1}{dx}+\frac{dT_3}{dy}+\frac{dT_2}{dz}+\rho X=0,\quad \frac{dT_3}{dx}+\frac{dN_2}{dy}+\frac{dT_1}{dz}+\rho Y=0,\quad \frac{dT_2}{dx}+\frac{dT_1}{dy}+\frac{dN_3}{dz}+\rho Z=0,$$

où ρ désigne la densité du massif, c'est-à-dire sa masse sous l'unité de volume *apparent*, et X, Y, Z les composantes de la gravité g suivant les trois axes des x, y, z (*).

Je me bornerai à l'étude de déformations parallèles à un plan vertical, choisi pour celui des xy, et dans lesquelles le déplacement w sera nul, tandis

(*) On peut voir, au § I de la *Théorie des ondes liquides périodiques* (Recueil des savants étrangers de l'Académie des sciences de Paris, t. XX, 1872), les formules plus générales qu'il faudrait substituer à ces équations (26), si les dérivées des forces N, T en x, y, z contenaient des termes d'une grandeur notable indépendants des petites déformations ∂, g, comme il arrive précisément quand il s'agit d'ondes liquides.


Digitized by Google

que les déplacements u, v ne dépendront que de x et de y. Les relations (15), (16), (25) seront réduites par ces hypothèses à celles-ci :

$$(27)\quad \left\{\begin{array}{llll} \partial_x = \frac{du}{dx}, \quad \partial_y = \frac{dv}{dy}, & g_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}, & & \partial_z = 0, \quad g_{yz} = 0, \quad g_{zx} = 0; \\ N_1 = -p(1 - 2m\partial_x), & N_2 = -p(1 - 2m\partial_y), & N_3 = -p; & \\ T_1 = 0, & T_2 = 0, & T_3 = pmg_{xy}; & \\ \partial_x + \partial_y = 0. & & & \end{array}\right.$$

On voit que la traction appliquée aux éléments superficiels parallèles au plan des xy, traction qui a les composantes T_2, T_1, N_3 suivant les axes respectifs des x, y, z, est normale à ces éléments plans et égale à $-p$: en d'autres termes, *il s'exerce en chaque point, sur l'élément superficiel parallèle aux plans des déformations, une simple pression normale égale à la pression moyenne produite en ce point.*

Si α et $\frac{\pi}{2} - \alpha$ désignent les angles que la pesanteur fait avec les deux axes des y et des x, on a $X = g \sin \alpha$, $Y = g \cos \alpha$, $Z = 0$, et les deux premières équations (26) deviennent

$$(28) \quad \ldots \quad \frac{dN_1}{dx} + \frac{dT}{dy} + \rho g \sin \alpha = 0, \quad \frac{dT}{dx} + \frac{dN_2}{dy} + \rho g \cos \alpha = 0,$$

dans lesquelles j'ai pu écrire simplement, comme je ferai désormais, T pour T_3, vu qu'il n'y a plus lieu de s'occuper de T_1 ni de T_2.

Quant à la troisième (26), elle se réduit à

$$\frac{dN_3}{dz} = 0, \quad \text{ou} \quad -\frac{dp}{dz} = 0,$$

et signifie, ce qui était évident, que la pression moyenne p ne dépend, comme u et v, que de x et de y.

En général, on substituera dans (28), à N_1, N_2, T, leurs expressions (27), de manière à ne laisser subsister pour inconnues que u, v, p. Mais on peut avoir quelquefois besoin de déterminer directement les forces N_1, N_2, T, sans

Digitized by Google

s'occuper des déplacements u, v. Alors une troisième équation en N_1, N_2, T devient nécessaire. Elle se tire de l'identité

$$\frac{d^2}{dxdy}\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)=\frac{d^2}{dx^2}\frac{dv}{dy}+\frac{d^2}{dy^2}\frac{du}{dx}, \quad \text{ou} \quad \frac{d^2g_{xy}}{dxdy}=\frac{d^2\partial_y}{dx^2}+\frac{d^2\partial_x}{dy^2},$$

en y portant les valeurs

$$g_{xy}=\frac{1}{2m}\frac{2T}{p}, \quad \partial_y=\frac{1}{2m}\left(\frac{N_2}{p}+1\right)=\frac{1}{2m}\left(\frac{N_2-N_1}{2p}\right), \quad \partial_x=\frac{1}{2m}\left(\frac{N_1-N_2}{2p}\right),$$

que trois des relations (27) fournissent pour les déformations g_{xy}, ∂_y, ∂_x : il vient

$$(28^{bis}). \quad 2\frac{d^2}{dxdy}\left(\frac{T}{p}\right)=\left(\frac{d^2}{dx^2}-\frac{d^2}{dy^2}\right)\left(\frac{N_2-N_1}{2p}\right), \quad \text{où} \quad p=-\frac{1}{2}(N_2+N_1) \text{ (*)}.$$

15. Nous aurons ultérieurement besoin de connaître la force élastique exercée sur l'élément plan, parallèle à l'axe des z, dont la normale fera, avec ceux des x et des y, deux angles donnés β et $\frac{\pi}{2}-\beta$. Les formules

Pressions, dilatations et glissements, parallèles au plan des déformations.

(*) Quand le corps, supposé toujours homogène et isotrope, est solide et non pulvérulent, trois des formules (24) donnent, en y faisant $\partial_z=0$, $\theta=\partial_x+\partial_y$,

$$g_{xy}=\frac{1}{2\mu}\cdot 2T, \quad \partial_y=\frac{1}{2\mu}\left[N_2-A-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(\frac{N_2+N_1}{2}-A\right)\right], \quad \partial_x=\frac{1}{2\mu}\left[N_1-A-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(\frac{N_2+N_1}{2}-A\right)\right].$$

L'équation (28bis) doit donc être alors remplacée par celle-ci

$$(28^{ter}) \ldots \quad 2\frac{d^2T}{dxdy}=\frac{d^2N_2}{dx^2}+\frac{d^2N_1}{dy^2}-\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}\right)(N_2+N_1).$$

Si ϖ désigne une fonction inconnue, qui restera seule à déterminer, les deux équations (28) reviennent à poser, comme on le reconnaît aisément,

$$T=-\rho g\frac{d^2\varpi}{dxdy}, \quad N_2=A+\rho g\left(\frac{d^2\varpi}{dx^2}-y\cos\alpha\right), \quad N_1=A+\rho g\left(\frac{d^2\varpi}{dy^2}-x\sin\alpha\right),$$

et la formule (28ter) prend la forme

$$\Delta_2\Delta_2\varpi=0,$$

en représentant par Δ_2 l'expression symbolique $\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}$.

Digitized by Google

générales (21), dans lesquelles il faudra ainsi remplacer cos α, cos β, cos γ par cos β, sin β, 0, et poser d'ailleurs $T_2 = 0$, $T_1 = 0$, donneront, pour composantes respectives de cette pression suivant les x, suivant les y et suivant les z,

$$(29) \quad p_x = N_1 \cos\beta + T \sin\beta, \quad p_y = T\cos\beta + N_2 \sin\beta, \quad p_z = 0.$$

Mais il est préférable d'avoir ses deux composantes, *normale*, $\mathfrak{N}$, et *tangentielle*, $\mathfrak{T}$ (suivant la direction qui fait avec les x positifs l'angle $\beta + \frac{\pi}{2}$) : on les obtiendra en ajoutant les composantes (29), après les avoir respectivement multipliées par les cosinus des angles que fait avec les x, y, z la direction sur laquelle on les projette, savoir, pour $\mathfrak{N}$, par cos β, sin β, 0, et, pour $\mathfrak{T}$, par cos $(\beta + \frac{\pi}{2})$, sin $(\beta + \frac{\pi}{2})$, 0, ou par $-$ sin β, cos β, 0. Il vient ainsi, après avoir remplacé $\cos^2\beta$, $\sin^2\beta$, $\cos\beta \sin\beta$ par $\frac{1}{2}(1 + \cos 2\beta)$, $\frac{1}{2}(1 - \cos 2\beta)$, $\frac{1}{2}\sin 2\beta$, et avoir observé que $N_1 + N_2 = -2p$:

$$(30) \quad \mathfrak{N} = -p - \frac{N_2 - N_1}{2}\cos 2\beta + T \sin 2\beta, \quad \mathfrak{T} = \frac{N_2 - N_1}{2} \sin 2\beta + T\cos 2\beta.$$

J'appellerai β_0 l'angle auxiliaire, compris entre zéro et π, que définissent les relations

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin 2\beta_0 = -\dfrac{T}{R}, \quad \cos 2\beta_0 = \dfrac{\frac{1}{2}(N_2 - N_1)}{R}, \\ \text{où} \quad R = \sqrt{T^2 + \left(\dfrac{N_2 - N_1}{2}\right)^2}; \end{array} \right.$$

en remplaçant alors T et $\frac{1}{2}(N_2 - N_1)$ par $-R \sin 2\beta_0$ et par $R \cos 2\beta_0$, les formules (30) deviendront simplement

$$(32) \quad \mathfrak{N} = -p - R\cos 2(\beta - \beta_0), \quad \mathfrak{T} = R \sin 2(\beta - \beta_0).$$

On peut d'ailleurs, dans les formules (31), substituer à N_1, N_2, T leurs valeurs (27); ce qui donne

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin 2\beta_0 = \dfrac{-g_{xy}}{\pm\sqrt{g_{xy}^2 + (\partial_y - \partial_x)^2}}, \quad \cos 2\beta_0 = \dfrac{\partial_y - \partial_x}{\pm\sqrt{g_{xy}^2 + (\partial_y - \partial_x)^2}}, \\ R = \pm\, mp\sqrt{g_{xy}^2 + (\partial_y - \partial_x)^2}, \end{array} \right.$$

Digitized by Google

où il faudra prendre soit les signes supérieurs, soit les signes inférieurs, suivant que la pression moyenne p sera positive ou négative.

Il nous sera encore utile de connaître, en fonction de ∂_x, ∂_y, g_{xy}, 1° la dilatation $\partial_{x'}$ de la ligne matérielle, parallèle au plan des xy, qui faisait primitivement avec les axes des x, y, z les angles respectifs β, $\frac{\pi}{2} - \beta$, 0, 2° la dilatation $\partial_{y'}$, de la ligne, primitivement normale à celle-là et également parallèle aux xy, qui faisait avec l'axe des x l'angle $\beta + \frac{\pi}{2}$, et 3° enfin le petit cosinus $g_{x'y'}$, de l'angle que font, après les déformations, ces deux lignes matérielles. Il suffit pour cela d'observer que les expressions (27) de N_1, T_3, applicables à tous les systèmes d'axes rectangulaires pris dans le plan des xy et notamment à ceux qui auraient été primitivement parallèles à ces lignes, donnent

$$\mathfrak{N} = -p(1 - 2m\partial_{x'}), \quad \mathfrak{T} = pmg_{x'y'}.$$

De la comparaison de ces valeurs de $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}$ à (32), et vu la valeur (33) de R, il résulte :

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} \partial_{x'} &= -\frac{R}{2mp}\cos 2(\beta - \beta_0) = \mp \frac{1}{2}\sqrt{g_{xy}^2 + (\partial_y - \partial_x)^2}\cos 2(\beta - \beta_0), \\ g_{x'y'} &= \frac{R}{mp}\sin 2(\beta - \beta_0) = \pm \sqrt{g_{xy}^2 + (\partial_y - \partial_x)^2}\sin 2(\beta - \beta_0). \end{aligned} \right.$$

D'un autre côté, la dernière formule (27), également applicable à tous les systèmes d'axes rectangulaires pris dans le plan des xy, donne

$$(34^{bis}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \partial_{y'} = -\partial_{x'}.$$

Les trois pressions principales F_1, F_2, F_3 s'obtiennent aisément au moyen des relations (27) et (32). Et d'abord, l'une d'elles, parallèle à l'axe des z par raison de symétrie, est N_3 ou $-p$. Les deux autres, évidemment exercées sur deux éléments plans parallèles au même axe des z, sont les deux valeurs de $\mathfrak{N}$ qui correspondent à des valeurs de $\mathfrak{T}$ nulles, c'est-à-dire à $\sin 2(\beta - \beta_0) = 0$, $\cos 2(\beta - \beta_0) = \mp 1$; elles valent $-p + R$ et $-p - R$. En rangeant ces trois pressions par ordre de grandeur décroissante, il vient ainsi

$$(34^{ter}) \quad \ldots\ldots \quad F_1 = -p + R, \quad F_2 = -p, \quad F_3 = -p - R.$$

Digitized by Google

Les trois dilatations principales correspondantes sont par suite

$$(34^{quater}) \quad \ldots\ldots \quad \delta_1 = \frac{R}{2mp}, \quad \delta_2 = 0, \quad \delta_3 = -\frac{R}{2mp}.$$

Remarquons enfin que les deux forces principales F_1, F_3 font, avec la droite dont β_0 désigne l'inclinaison sur l'axe des x, deux angles $\beta - \beta_0$ tels, que $\cos 2(\beta - \beta_0) = -1$ pour F_1, $\cos 2(\beta - \beta_0) = +1$ pour F_3; ces angles valent donc, à part un nombre entier de demi-circonférences, $\frac{\pi}{2}$ pour F_1 et zéro pour F_3. Ainsi, *la plus petite*, F_3, *des forces élastiques principales coïncide avec la direction qui fait avec les x positifs l'angle* β_0.

Conditions spéciales aux surfaces-limites.

16. Si les petits déplacements u, v, w et la pression moyenne p varient avec continuité d'un point à l'autre dans *toute* l'étendue du massif (comme je l'admettrai), il n'y aura pas, à son intérieur, d'autres équations d'équilibre à vérifier que la condition d'incompressibilité

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

et les trois équations indéfinies (26), dans lesquelles on suppose les forces N, T remplacées par leurs expressions en fonction de u, v, w, p. Mais il existera des conditions spéciales, relatives, les unes aux surfaces libres où le massif pulvérulent n'est en rapport qu'avec l'atmosphère, les autres aux surfaces-parois, qui seront constituées soit par un sol solide, soit par les faces postérieures des murs de soutènement.

Aux surfaces libres, il faudra exprimer que la pression exercée par le massif sur sa couche superficielle a ses trois composantes, suivant les axes, égales et contraires à celles de la pression exercée du dehors sur la même couche, pression nulle puisqu'on fait abstraction de l'atmosphère. La troisième de ces conditions est vérifiée identiquement dans le cas, auquel nous nous bornons, de déformations planes : en effet, au point de la surface libre où la normale à cette surface, menée vers l'intérieur, fera avec les axes des x, y, z les angles respectifs γ, $\frac{\pi}{2} - \gamma$, 0, les formules (29), dans lesquelles

Digitized by Google

il suffira de remplacer β par γ et de poser $p_x = 0$, $p_y = 0$, $p_z = 0$, donneront simplement

$$(35) \quad . \quad . \quad N_1 \cos\gamma + T \sin\gamma = 0, \quad T\cos\gamma + N_2 \sin\gamma = 0 \quad \text{(à la surface libre).}$$

Aux parois, il y aura également trois conditions spéciales. La première s'obtiendra en exprimant que les points du massif adjacents à une paroi ne la quittent pas, ou que leurs coordonnées $x + u$, $y + v$, $z + w$ vérifient constamment l'équation de la surface. Les deux autres varieront avec le degré de rugosité de la paroi. Je ne considérerai que les deux cas extrêmes où ce degré sera, soit suffisant pour empêcher tout glissement fini de la couche adjacente du massif, soit au contraire nul, c'est-à-dire tel, que la paroi n'exerce aucun frottement ou aucune action tangentielle sensible. Afin de traiter en premier lieu les problèmes les plus simples, je supposerai même d'abord que le massif, après avoir été posé sur le sol qui le porte et contre les murs qui le soutiennent, se soit trouvé un instant à l'état *naturel* avant de devenir pesant comme il l'est en effet, et j'admettrai en outre l'immobilité absolue des murs de soutènement.

Dans le cas d'une paroi rugueuse, les deux composantes du déplacement suivant deux directions rectangulaires prises tangentiellement à la paroi seront égales à zéro, aussi bien que sa composante normale à celle-ci, et l'on y aura en définitive $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$. Dans le cas contraire d'une paroi polie, il faudra annuler les deux composantes, suivant ces directions rectangulaires tangentielles à la surface, de l'action que le massif exerce sur sa couche superficielle. Bornons-nous toujours à l'étude de déformations planes et appelons encore γ, $\frac{\pi}{2} - \gamma$, 0, les angles que la normale menée, vers l'intérieur du massif, à un élément de sa surface, fait avec les axes respectifs des x, y, z. Les formules (32), si l'on y remplace β par γ, donneront pour les deux composantes, normale $-\mathfrak{N}$ et tangentielle $\mathfrak{T}$, de la poussée exercée par le massif sur l'unité d'aire de sa couche superficielle (ou par suite de la paroi adjacente)

$$(36) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad -\mathfrak{N} = p + R\cos 2(\gamma - \beta_0), \quad \mathfrak{T} = R \sin 2(\gamma - \beta_0),$$

où R et β_0 auront les valeurs définies par les relations (33). Le radical R

Digitized by Google

étant essentiellement positif, on annulera généralement $\mathfrak{G}$, si la paroi est infiniment polie, en posant $\sin 2(\gamma - \beta_0) = 0$: dans le même cas, la composante $u \cos \gamma + v \sin \gamma$, normale à la paroi, du déplacement de la couche superficielle, devra être nulle. Les conditions cherchées seront donc :

$$(37) \ldots \begin{cases} u = 0, \quad v = 0 \quad \text{(contre une paroi rugueuse)}, \\ u \cos \gamma + v \sin \gamma = 0, \quad \sin 2(\gamma - \beta_0) = 0, \quad \text{(contre une paroi polie)}. \end{cases}$$

Il ne faut pas oublier que ces conditions aux parois, les plus simples qu'on puisse imaginer, ne concernent que le cas hypothétique où l'état *naturel*, dans lequel on a partout $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, aurait existé antérieurement au mode d'équilibre étudié : en d'autres termes, elles ne s'appliquent qu'autant que la masse pulvérulente est supposée d'abord libre de toute pression et sans pesanteur, puis déformée, sous l'action de son poids effectif, sans que la couche adjacente à une paroi éprouve de déplacement dans le sens normal, si celle-ci est polie, ni même dans aucun sens si elle est rugueuse. Or ces circonstances ne se réalisent pas dans la pratique. Les murs que l'on construit effectivement ont sans doute leurs faces postérieures plus rugueuses qu'il ne faut pour empêcher le glissement des particules terreuses adjacentes : mais celles-ci s'y trouvent immobilisées dans d'autres positions que celles d'état naturel, et les conditions cherchées s'obtiennent en égalant leurs déplacements u, v, w à des fonctions de x, y, z qu'il faut supposer données dans chaque cas pour que le problème de l'équilibre soit déterminé, mais qui seront en réalité inconnues. De même, près d'une paroi polie, la composante totale des déplacements suivant la normale à la paroi sera généralement une fonction déterminée dans chaque cas, quoique inconnue, de x, y, z, et ne s'annulera qu'exceptionnellement.

Avec les données dont dispose l'ingénieur, l'équilibre qui se produit dans un massif, au moment même où on le forme en déchargeant successivement de la terre sur le sol ou contre un mur de soutènement, ne paraît donc pas susceptible d'une détermination précise, et il doit être fort complexe ou affecté d'un grand nombre d'anomalies locales (*). Mais ce qu'il importe de

(*) La même difficulté se présenterait si le massif était solide et élastique au lieu d'être dénué de cohésion : elle ne tient qu'à notre ignorance des conditions réelles dans lesquelles se trouve

Digitized by Google

connaître, c'est le mode d'équilibre *définitif* qui subsistera, lorsque les petits ébranlements que tout massif éprouve presque à chaque instant auront fait disparaître les irrégularités et amené un tassement complet, ou groupé tous les grains sablonneux de la manière en quelque sorte la moins forcée. Un tel mode d'équilibre, par le fait même qu'il s'établit de préférence à tout autre, doit être, *de tous les modes compatibles avec les circonstances, celui qui assure le mieux la stabilité intérieure du massif en l'écartant le moins possible de l'état naturel.* On verra, au § VIII, comment cette condition de stabilité peut tenir lieu de la connaissance des relations spéciales aux parois.

---

§ IV.

LEUR INTÉGRATION, QUAND LE MASSIF EST LIMITÉ SUPÉRIEUREMENT PAR UN PLAN ET INDÉFINI DANS LES AUTRES SENS.

---

17. Considérons d'abord un massif limité supérieurement par un plan et indéfini dans les autres sens, ou, ce qui revient au même ici, compris latéralement entre deux murs infiniment polis perpendiculaires à une horizontale du talus supérieur. Les déplacements se feront, par raison de symétrie, dans des plans normaux à cette horizontale et de la même manière dans tous : si donc on prend un de ces plans verticaux pour celui des xy, les formules précédemment établies pour le cas de déformations planes pourront être employées. Première intégration.

Soient : OA (fig. 1) une ligne de plus grande pente de la surface libre ou du talus supérieur dans l'état primitif du massif, OG une verticale dirigée en bas. Je prendrai pour axe des x la bissectrice de l'angle GOA, pour axe

la couche adjacente à la paroi, nullement à la théorie même de l'équilibre d'élasticité des massifs pulvérulents.

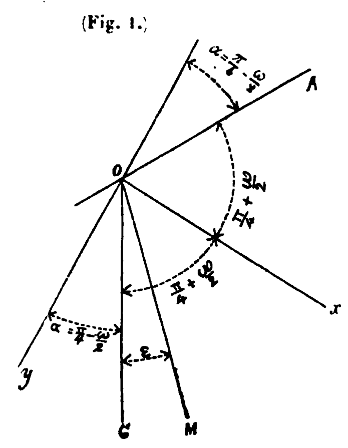
Digitized by Google

des y une perpendiculaire à Ox, menée de manière que l'angle GOy soit aigu. Si l'on appelle ω l'inclinaison primitive du talus sur l'horizon (inclinaison variable au plus de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$), la quantité α qui, dans les formules (28), nº (14), désigne l'angle fait par la verticale avec l'axe des y, vaudra évidemment $\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}$, et on aura tout à la fois

$$(38) \quad \ldots\ldots\ldots \quad GOA=\frac{\pi}{2}+\omega, \quad \alpha \text{ ou } GOy=\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}.$$

Le massif étant indéfini parallèlement à OA, toutes les particules de matière situées à une même distance de la surface se trouvent exactement dans les mêmes conditions. En d'autres termes, les quantités N_1, N_2, T, et par suite p, ∂_x, ∂_y, g_{xy}, ne sont fonction, en chaque point, que de la distance primitive l du point considéré à la surface. La perpendiculaire l, menée à OA jusqu'à la rencontre d'un point quelconque (x, y) du massif, fait d'ailleurs avec les axes des x et des y les angles respectifs α, $\frac{\pi}{2}-\alpha$ et l'on a

(Fig. 1.)



$$(39) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad l=x\cos\alpha+y\sin\alpha.$$

Par suite, les dérivées en x et en y de toute fonction de l s'obtiendront, au moyen de ses dérivées en l, par les formules symboliques

$$(40). \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{d}{dx}=\cos\alpha\frac{d}{dl}, \quad \frac{d}{dy}=\sin\alpha\frac{d}{dl},$$

et les équations indéfinies (28) pourront s'écrire

$$(41). \quad . \quad \frac{d}{dl}\left[N_1\cos\alpha+(T+\rho gl)\sin\alpha\right]=0, \quad \frac{d}{dl}\left[(T+\rho gl)\cos\alpha+N_2\sin\alpha\right]=0.$$

La normale à la surface libre OA faisant d'ailleurs avec l'axe des x l'angle α,

Digitized by Google

les conditions spéciales (35), où il faudra remplacer γ par α, et qui devront être vérifiées à cette surface, reviendront à dire que les expressions

$$N_1 \cos\alpha + (T + \rho g l)\sin\alpha, \quad (T + \rho g l)\cos\alpha + N_2 \sin\alpha$$

s'annulent pour $l = 0$. Ces expressions, d'après (41), seront donc nulles partout, et l'on aura

$$(42) \quad \ldots \quad N_1 \cos\alpha + (T + \rho g l)\sin\alpha = 0, \quad (T + \rho g l)\cos\alpha + N_2 \sin\alpha = 0.$$

En ajoutant les deux équations fondamentales (42), après les avoir multipliées respectivement, soit par $\cos\alpha$, $-\sin\alpha$, soit par $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, et en substituant dans les résultats, à $\cos^2\alpha$, $\sin^2\alpha$, $\cos\alpha\sin\alpha$, $\frac{1}{2}(N_1 + N_2)$, leurs valeurs

$$\frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha), \quad \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha), \quad \frac{1}{2}\sin 2\alpha, \quad -p,$$

ou encore, d'après (38)

$$\frac{1}{2}(1 + \sin\omega), \quad \frac{1}{2}(1 - \sin\omega), \quad \frac{1}{2}\cos\omega, \quad -p,$$

on trouve qu'elles reviennent aux deux suivantes

$$(43) \quad \ldots \quad \frac{1}{2}(N_1 - N_2) - p\sin\omega = 0, \quad T + \rho g l - p\cos\omega = 0.$$

18. Remplaçons N_1 et N_2, dans la première équation (43), par leurs valeurs (27), dans lesquelles les deux dilatations ∂_x, ∂_y sont égales et de signes contraires. Comme la pression moyenne p n'est évidemment pas nulle à l'intérieur du massif, il viendra *Deuxième intégration.*

$$\partial_x - \partial_y = \frac{\sin\omega}{m},$$

c'est-à-dire

$$(44) \quad \ldots \quad \partial_x \text{ ou } \frac{du}{dx} = \frac{\sin\omega}{2m}, \quad \partial_y \text{ ou } \frac{dv}{dy} = -\frac{\sin\omega}{2m}.$$


Digitized by Google

Ces équations (44), intégrées en introduisant deux fonctions arbitraires φ et ψ, donnent

$$(45) \quad \ldots\ldots \quad u=\frac{\sin\omega}{2m}\left[x+\varphi(y)\right], \quad v=\frac{\sin\omega}{2m}\left[-y+\psi(x)\right].$$

On en déduit

$$(46) \quad \ldots\ldots\ldots \quad g_{xy} \text{ ou } \frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}=\frac{\sin\omega}{2m}\left[\varphi'(y)+\psi'(x)\right].$$

Or la déformation g_{xy} ne doit dépendre que de la distance l du point considéré à la surface libre, comme il a été dit, et les formules symboliques (40), qui lui sont par conséquent applicables, montrent que ses deux dérivées en x et en y doivent être entre elles comme $\cos\alpha$ est à $\sin\alpha$. Il vient donc

$$(47) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{\psi''(x)}{\cos\alpha}=\frac{\varphi''(y)}{\sin\alpha},$$

et les deux rapports (47), indépendants, le premier de y, le second de x, ne peuvent que se réduire à une même constante $2c$. Deux intégrations successives donnent par suite, en introduisant quatre constantes arbitraires c', c'', c'_1, c''_1,

$$\varphi(y)=cy^2\sin\alpha+(c'+c'')y+c'_1, \quad \psi(x)=cx^2\cos\alpha+(c'-c'')x+c''_1.$$

Les expressions (45) de u, v deviennent ainsi

$$(48) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} u=\dfrac{\sin\omega}{2m}\left[\quad x+cy^2\sin\alpha+(c'+c'')y+c'_1\right], \\ v=\dfrac{\sin\omega}{2m}\left[-y+cx^2\cos\alpha+(c'-c'')x+c''_1\right], \end{cases}$$

et celles, (44), (46), (27), de ∂_x, $-\partial_y$, g_{xy}, N_1, N_2, T, sont à leur tour :

$$(49) \quad \ldots \quad \begin{cases} \partial_x=-\partial_y=\dfrac{\sin\omega}{2m}, \quad g_{xy}=\dfrac{\sin\omega}{m}(c'+cl), \\ N_1=-p(1-\sin\omega), \quad N_2=-p(1+\sin\omega), \quad T=p(c'+cl)\sin\omega. \end{cases}$$

Digitized by Google

Quant à la pression moyenne p, elle résulte de la seconde équation (43), dans laquelle on remplacera T par sa valeur (49). La résolution de cette équation par rapport à p donne ensuite

$$(50) \quad \ldots\ldots\ldots \quad p = \frac{\rho g l}{\cos\omega - (c' + cl)\sin\omega}.$$

19. Des cinq constantes arbitraires c, c', c'', c'_1, c''_1, les deux premières seules, c, c', entrent dans les expressions des déformations ∂, g éprouvées par le massif. Les trois autres ne correspondent en effet qu'à un petit mouvement d'ensemble, savoir, c'' à une petite rotation du massif autour de l'origine O, et c'_1, c''_1 à deux translations parallèles aux axes; or ce mouvement d'ensemble reste indéterminé tant que le massif est supposé indéfini et qu'on fait par suite abstraction de ses relations avec les corps fixes qui le touchent à des distances plus ou moins grandes de l'origine des coordonnées. Transformées d'une famille de droites matérielles parallèles.

On peut donc supposer $c'' = 0$, $c'_1 = 0$, $c''_1 = 0$, quand il ne s'agit que d'étudier la forme prise par une ligne matérielle quelconque dont l'équation était $f(x, y) = 0$ avant les déplacements. Si x', y' désignent, dans le nouvel état d'équilibre, les coordonnées du point matériel qui était primitivement en (x, y), on aura, d'après (48),

$$(51) \quad \ldots \quad \begin{cases} x = x' - u = \text{sensiblement } x' - \dfrac{\sin\omega}{2m}(x' + cy'^2\sin\alpha + c'y'), \\ y = y' - v = \text{sensiblement } y' - \dfrac{\sin\omega}{2m}(-y' + cx'^2\cos\alpha + c'x'), \end{cases}$$

et la transformée de la courbe $f(x, y) = 0$ sera

$$(52) \quad f\left[x' - \frac{\sin\omega}{2m}(x' + cy'^2\sin\alpha + c'y'),\quad y' - \frac{\sin\omega}{2m}(-y' + cx'^2\cos\alpha + c'x')\right] = 0.$$

Toute famille de droites parallèles

$$(53) \quad \ldots\ldots\ldots \quad x\cos A + y\sin A = k,$$

Digitized by Google

où A désigne l'inclinaison constante de leurs normales sur l'axe des x, et k, paramètre variable d'une droite à l'autre, leur distance à l'origine, se transforme en une famille de coniques ayant pour équation

$$(54)\quad \left\{ \begin{aligned} & x'\left[\left(1-\frac{\sin\omega}{2m}\right)\cos A-\frac{c'\sin\omega}{2m}\sin A\right]+y'\left[\left(1+\frac{\sin\omega}{2m}\right)\sin A-\frac{c'\sin\omega}{2m}\cos A\right] \\ & -\frac{c\sin\omega}{2m}(y'^2\sin\alpha\cos A+x'^2\cos\alpha\sin A)=k, \end{aligned} \right.$$

ou bien

$$(55)\quad \left\{ \begin{aligned} & \cos\alpha\sin A\left[x'-\frac{\left(\frac{2m}{\sin\omega}-1\right)\cos A-c'\sin A}{2c\cos\alpha\sin A}\right]^2+\sin\alpha\cos A\left[y'-\frac{\left(\frac{2m}{\sin\omega}+1\right)\sin A-c'\cos A}{2c\sin\alpha\cos A}\right]^2 \\ & =\frac{\left[\left(\frac{2m}{\sin\omega}-1\right)\cos A-c'\sin A\right]^2}{4c^2\cos\alpha\sin A}+\frac{\left[\left(\frac{2m}{\sin\omega}+1\right)\sin A-c'\cos A\right]^2}{4c^2\sin\alpha\cos A}-\frac{2mk}{c\sin\omega}. \end{aligned} \right.$$

Ces coniques sont semblables, concentriques, et ont leurs axes parallèles à ceux des x et des y, c'est-à-dire aux deux bissectrices des quatre angles formés par une verticale et par le profil du talus supérieur. Elles se réduisent à des cercles lorsque les droites proposées sont parallèles à la surface libre du massif, ou que $A=\alpha$, et à des droites parallèles, d'après (54), dans le cas où la constante c est nulle.

Ce dernier résultat aurait pu être directement déduit des valeurs (49) de ∂_x, $-\partial_y$, g_{xy}, qui deviennent constantes quand $c=0$: les éléments plans matériels, primitivement rectangulaires, que découpent dans le plan des xy une double infinité de droites parallèles aux axes coordonnés et équidistantes, sont donc changés, par les déformations produites, en parallélogrammes tous égaux, et des points du réseau ainsi formé qui se trouvaient initialement alignés le long de deux droites parallèles ne cesseront pas de se trouver disposés en deux files rectilignes ayant toutes les deux la même orientation.

Forces élastiques parallèles au plan des déformations; dilatations et glissements corrélatifs.

20. Cherchons les deux composantes, normale $-\mathfrak{N}$ et tangentielle $\mathfrak{T}$, de la pression (force élastique changée de signe) exercée sur l'élément

Digitized by Google

plan, parallèle à l'axe des z, qui fait avec la verticale un angle quelconque ε_1, ou dont la normale fait avec l'horizon le même angle ε_1, avec le talus supérieur OA l'angle $\omega - \varepsilon_1$, et enfin avec les x positifs l'angle $-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}+\varepsilon_1\right)$. Il suffira de porter dans les formules (30) les valeurs (49), (50), de N_1, N_2, T, p, et de faire en outre $\beta = -\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}+\varepsilon_1\right)$, ou $2\beta = -\frac{\pi}{2}+(\omega - 2\varepsilon_1)$. On trouve d'abord

$$-\mathfrak{N} = p\left\{1+\sin\omega\left[(c'+cl)\cos(\omega-2\varepsilon_1)-\sin(\omega-2\varepsilon_1)\right]\right\},$$

$$\mathfrak{T} = p\sin\omega\left[(c'+cl)\sin(\omega-2\varepsilon_1)+\cos(\omega-2\varepsilon_1)\right].$$

Posons

$$(56) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad c'+cl = \operatorname{tg}(\omega-2\varepsilon),$$

ε désignant un angle auxiliaire GOM, *qui devient sensiblement constant, quel que soit c, pour l très-grand :* nous choisirons en général sa valeur de manière que la différence $\omega - 2\varepsilon$ soit comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$; mais il pourrait encore avoir cette valeur augmentée ou diminuée d'un multiple quelconque de $\frac{\pi}{2}$. Les expressions ci-dessus de $-\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}$, et celle (50) de la pression moyenne p, deviendront :

$$(57) \quad \ldots \quad \begin{cases} p = \dfrac{\rho g l\cos(\omega-2\varepsilon)}{\cos 2(\omega-\varepsilon)}, \\ -\mathfrak{N} = \dfrac{\rho g l}{\cos 2(\omega-\varepsilon)}\left[\cos(\omega-2\varepsilon)+\sin\omega\sin 2(\varepsilon_1-\varepsilon)\right], \\ \mathfrak{T} = \dfrac{\rho g l}{\cos 2(\omega-\varepsilon)}\sin\omega\cos 2(\varepsilon_1-\varepsilon). \end{cases}$$

Il est aisé d'en déduire : 1° la valeur $\partial_{x'}$ de la petite dilatation éprouvée par la ligne matérielle primitivement normale à l'élément plan, ou qui était inclinée au-dessus de l'horizon de l'angle ε_1 ; 2° le petit cosinus $g_{x'y'}$ de l'angle que fait, après les déplacements, cette ligne matérielle avec celle qui lui était normale et dont l'inclinaison sur la verticale (dirigée vers en bas) valait ε_1. Ces valeurs se déduiront en effet des expressions générales des forces élastiques parallèles au plan des déformations

$$-\mathfrak{N} = p(1-2m\partial_{x'}), \quad \mathfrak{T} = pmg_{x'y'},$$

Digitized by Google

si l'on substitue à — $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}$, p leurs expressions (57). Il viendra

$$(58) \quad \ldots \quad \partial_{x'} = -\frac{\sin\omega \sin 2(\varepsilon_1 - \varepsilon)}{2m\cos(\omega - 2\varepsilon)}, \quad g_{x'y'} = \frac{\sin\omega\cos 2(\varepsilon_1 - \varepsilon)}{m\cos(\omega - 2\varepsilon)}.$$

Les formules (56), (57), (58) nous seront d'une grande utilité. Je me contenterai actuellement de tirer des deux dernières quelques conséquences presque évidentes.

La dilatation $\partial_{x'}$ est nulle quand $\varepsilon_1 = \varepsilon$, c'est-à-dire pour l'élément matériel rectiligne qui est incliné sur l'horizon de l'angle ε défini par l'équation (56), et elle est nulle aussi pour l'élément rectiligne, primitivement perpendiculaire au précédent, qui fait avec la verticale le même angle ε, ou avec l'horizon l'angle $\varepsilon - \frac{\pi}{2}$, angle qui pourrait être pris également pour valeur de ε vérifiant l'équation (56), sans que le mode d'équilibre fût en rien modifié. Ces deux éléments linéaires et leurs opposés sont en chaque point les seuls qui n'éprouvent aucune variation de grandeur; l'un d'eux tourne par rapport à l'autre de manière à réduire leur angle de la petite quantité $g_{x'y'} = \frac{\sin\omega}{m\cos(\omega - 2\varepsilon)}$, qui acquiert justement pour ces deux droites sa valeur absolue maxima.

C'est suivant les bissectrices des quatre angles formés par les directions ainsi définies que se produisent les deux dilatations linéaires principales ∂_1, ∂_3. J'appellerai ε' l'inclinaison sur l'horizon de l'une quelconque de ces directions intermédiaires, de manière à avoir

$$(59) \quad \ldots \ldots \quad \varepsilon' = \varepsilon \mp \frac{\pi}{4},$$

en désignant ainsi par ε, comme on a vu qu'il était permis de le faire, l'inclinaison sur l'horizon de l'un des éléments rectilignes, non contractés ni dilatés, qui font avec la dilatation principale considérée un angle de 45°. Ces dilatations principales, dont l'une ∂_1 est positive et l'autre ∂_3 négative, ont pour valeurs, d'après la première formule (58),

$$(60) \quad \ldots \quad \partial_1 = \pm\frac{\sin\omega}{2m\cos(\omega - 2\varepsilon)}, \quad \partial_3 = \mp\frac{\sin\omega}{2m\cos(\omega - 2\varepsilon)}.$$

Digitized by Google

Les éléments matériels rectilignes qui les éprouvent restent d'ailleurs rectangulaires, car la seconde formule (58) donne $g_{x'y'} = 0$ quand on y fait $\varepsilon_1 = \varepsilon' = \varepsilon \mp \frac{\pi}{4}$.

On verra plus loin que les seuls modes d'équilibre utiles à considérer sont ceux pour lesquels la constante arbitraire c est nulle, ce qui rend constantes, d'après (56), la valeur de $\operatorname{tg}(\omega - 2\varepsilon)$ et celle de ε. *Alors un double système de lignes matérielles respectivement équidistantes, primitivement inclinées, les unes, sur la verticale, les autres, sur l'horizon, de l'angle ε, et qui divisaient une section normale du massif en carrés égaux, sont encore rectilignes, parallèles, et ont les mêmes longueurs, après les déformations ; mais elles ont tourné les unes par rapport aux autres du petit angle $\frac{\sin\omega}{m\cos(\omega-2\varepsilon)}$: les carrés qu'elles comprenaient se sont ainsi transformés en losanges égaux. Par suite, la forme définitive du massif s'obtient simplement si on le conçoit, dans son premier état, divisé en couches infiniment minces inclinées toutes de l'angle aigu ε sur la verticale, et si l'on fait glisser celles-ci dans leurs plans respectifs, de manière que, l'une d'elles restant fixe, toute autre, située à une distance D en avant de cette première couche, se déplace (vers en bas) de la quantité $\frac{D\sin\omega}{m\cos(\omega-2\varepsilon)}$* (*).

(*) Pour un massif solide, et non plus pulvérulent, les formules (38) à (43) donnent toujours

(49 *bis*) . . . . . $N_1 = -p(1-\sin\omega),\quad N_2 = -p(1+\sin\omega),\quad T = p\cos\omega - \rho g l'$,

et, p ne dépendant que de l, la relation (28 *ter*) [p. 31], réduite à $\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\frac{d^2p}{dl^2} = 0$, montre que p *est une fonction linéaire de l.* Les formules (57) ne cessent pas d'être applicables, si l'on continue à prendre

(56 *bis*) . . . . $\operatorname{tg}(\omega-2\varepsilon) = \frac{1}{\sin\omega}\left(\cos\omega - \frac{\rho g l}{p}\right)$:

ε devient donc encore sensiblement constant à d'assez grandes profondeurs l. On trouve aisément, au moyen des formules (24) [où A = 0] et (57), que les deux dilatations principales ∂_1, ∂_2 ont alors les valeurs :

(60 *bis*) . . . . $\partial = -\frac{p}{2\mu}\left[\frac{\mu}{\lambda+\mu} \pm \frac{\sin\omega}{\cos(\omega-2\varepsilon)}\right]$.

Observons que, d'après la relation (56 *bis*), qui revient d'ailleurs à la première (57), l'angle $\omega - 2\varepsilon$ varie sans cesse dans un même sens lorsque le rapport $\frac{p}{\rho g l}$ croît avec continuité de $-\infty$ à ∞ : cet angle va ainsi de $-\frac{\pi}{2} - \omega$ à $\frac{\pi}{2} - \omega$ si ω est positif, de $\frac{\pi}{2} - \omega$ à $-\frac{\pi}{2} - \omega$ si ω est négatif; sa valeur absolue est supérieure à $\frac{\pi}{2}$, égale à $\frac{\pi}{2}$, ou inférieure à $\frac{\pi}{2}$, suivant que le rapport $\frac{p}{\rho g l}$ est négatif, nul ou positif.

Digitized by Google

§ V.

ÉTUDE DU MÊME MASSIF, QUAND ON LE SUPPOSE, NON PLUS INDÉFINI, MAIS SOUTENU D'UN CÔTÉ PAR UN MUR PLAN QUI COUPE SON TALUS SUPÉRIEUR SUIVANT UNE HORIZONTALE.

Les formules obtenues pour un massif indéfini sont parfois applicables à des massifs limités.

21. De tous les modes d'équilibre que représentent les formules (48), (49), (50), les plus intéressants sont ceux qui vérifieront d'eux-mêmes, sur toute la longueur d'une ligne située dans le plan des xy, les conditions spéciales à une paroi, par exemple, les deux premières ou les deux dernières des relations (37); car l'équilibre ne cessera pas d'exister si la couche matérielle dont cette ligne dessine le profil devient la face postérieure d'un mur de soutènement, et l'on aura résolu le problème de l'équilibre d'un massif qui, au lieu d'être indéfini, serait limité et soutenu, d'un côté, par un tel mur.

Il est évident que les formules (48), (49), (50), prises dans toute leur généralité, conviendraient quel que fût le profil d'un mur rugueux, si les particules adjacentes à ce mur s'y trouvaient immobilisées dans des positions telles, que leurs déplacements u, v eussent précisément les valeurs (48); mais je me bornerai dans ce paragraphe à l'étude des modes pour lesquels les conditions simples (37) seront satisfaites en tous les points d'une même ligne.

Quelle que soit la direction d'un mur à face postérieure plane, coupant le talus supérieur suivant une horizontale qu'on peut supposer choisie pour axe des z, il est facile de déterminer les constantes arbitraires c, c', c'', c'_1, c''_1, de manière que la première ou la seconde ligne des relations (37) se trouve vérifiée sur toute l'étendue de cette face.

Cas d'un massif limité par un mur à face postérieure plane et rugueuse.

22. Supposons, en premier lieu, que la face dont il s'agit soit rugueuse et dirigée suivant OM (fig. 1, p. 38), de manière à ne laisser subsister que

Digitized by Google

la partie AOM du massif. La couche terreuse adjacente à OM devra rester immobile pendant que toutes les autres parties du massif se déplaceront. Or, d'après ce qui a été dit après les formules (58), les seules couches matérielles, dans le massif indéfini, qui n'éprouvent aucune dilatation ni contraction, sont celles dont l'inclinaison sur la verticale est en chaque point égale à une des valeurs de ε que donne l'équation (56) : une de ces couches devant coïncider avec OM, on aura l'unique mode d'équilibre qui soit admissible en prenant, d'après cette même équation (56),

$$(61) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varepsilon = \text{GOM}, \quad c = 0, \quad c' = \operatorname{tg}(\omega - 2\varepsilon).$$

Alors la couche terreuse primitivement adjacente à OM n'éprouve aucune déformation, et toute autre couche, parallèle à celle-là et située à une distance D de la face postérieure OM du mur, glisse simplement dans son plan, en allant dans le sens de O vers M, de la quantité $\frac{D \sin \omega}{m \cos(\omega - 2\varepsilon)}$. Le point matériel O ne se déplaçant pas, on doit avoir $u = 0$, $v = 0$, pour $x = 0$, $y = 0$, et par suite $c'_1 = 0$, $c''_1 = 0$. Enfin la constante c'' se détèrmine de manière que le déplacement u, par exemple, s'annule tout le long de la droite OM, qui fait avec l'axe des y l'angle $\alpha + \varepsilon$ et dont l'équation est par conséquent $x - y \operatorname{tg}(\alpha + \varepsilon) = 0$: on trouve ainsi $c' + c'' = -\operatorname{tg}(\alpha + \varepsilon)$, ou

$$-c'' = \operatorname{tg}(\alpha + \varepsilon) + c' = \operatorname{tg}(\alpha + \varepsilon) + \operatorname{tg}(\omega - 2\varepsilon) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2} + \varepsilon\right) + \operatorname{tg}(\omega - 2\varepsilon) = \frac{1}{\cos(\omega - 2\varepsilon)}.$$

On voit que, *de tous les modes d'équilibre du massif indéfini, il y en a un et un seul pour lequel une couche plane* OM *de matière pulvérulente reste immobile pendant que les déformations s'opèrent : c'est celui pour lequel les diverses constantes* c, c', c'', c'_1, c''_1 *ont les valeurs que nous venons de déterminer ; en particulier, la constante* c *y est nulle, et le paramètre angulaire* ε, *alors invariable et caractéristique du mode d'équilibre, est égal à l'inclinaison de la couche immobilisée sur la verticale. Le tassement produit par le poids du massif se fait parallèlement à cette couche (où à la face postérieure du mur), et il est égal, pour chaque particule de matière, au produit de sa distance* D *au mur par le facteur constant* $\frac{\sin \omega}{m \cos(\omega - 2\varepsilon)}$.

Digitized by Google

Cherchons de combien le tassement causé par le poids du massif diminue l'inclinaison du talus supérieur sur l'horizon, inclinaison primitivement égale à ω.

La perpendiculaire D, abaissée de l'origine sur tout plan parallèle à la couche immobilisée, fait avec l'horizon l'angle ε et par suite avec la direction primitive du talus supérieur, au-dessous de celui-ci, l'angle $\omega - \varepsilon$; d'où il résulte que la distance primitive, mesurée parallèlement au mur, du pied de cette perpendiculaire au talus supérieur, vaut $D \operatorname{tg}(\omega - \varepsilon)$. Comme elle diminue, par suite du tassement, de la valeur du déplacement total, l'inclinaison, d'abord égale à $\omega - \varepsilon$, du talus supérieur sur la perpendiculaire D, décroît en même temps d'un petit angle ζ, tel, que la différence

$$D\left[\operatorname{tg}(\omega - \varepsilon) - \operatorname{tg}(\omega - \varepsilon - \zeta)\right], \quad \text{ou sensiblement } \frac{\zeta D}{\cos^2(\omega - \varepsilon)},$$

vaille précisément l'expression $D \frac{\sin \omega}{m \cos(\omega - 2\varepsilon)}$ du déplacement total. Le tassement a donc pour effet de diminuer l'inclinaison ω du talus supérieur au dessus de l'horizon, de la quantité

$$(62) \quad \dots \quad \zeta = \frac{\sin \omega \cos^2(\omega - \varepsilon)}{m \cos(\omega - 2\varepsilon)} = \frac{\sin \omega}{2m \cos(\omega - 2\varepsilon)}\left[1 + \cos 2(\omega - \varepsilon)\right].$$

Nous aurons besoin au n° suivant de savoir de quel angle, ζ', le tassement fait tourner autour de l'origine O une droite matérielle prise dans le massif à partir de cette origine et primitivement inclinée, sur le plan OM de la couche immobilisée, d'un demi-angle droit. La perpendiculaire D, abaissée d'un point de cette droite sur OM, est évidemment distante de l'origine O de la quantité $D \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$ avant les déplacements, et de la quantité $D \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \zeta'\right)$ après. L'accroissement, sensiblement égal à $\frac{D\zeta'}{\cos^2 \frac{\pi}{4}}$, ou a $2D\zeta'$, que cette distance reçoit, représente précisément le déplacement $\frac{\sin \omega}{m \cos(\omega - 2\varepsilon)} D$ du point considéré. On a donc

$$(62^{bis}) \quad \dots \quad \zeta' = \frac{\sin \omega}{2m \cos(\omega - 2\varepsilon)}.$$

Digitized by Google

Remarquons que l'angle fait par le talus supérieur OA avec la ligne matérielle dont il s'agit ici, ou qui était primitivement inclinée sur OM d'un quart d'angle droit, diminue de la quantité

$$(62^{ter}) \quad \zeta - \zeta' = \frac{\sin\omega\cos 2(\omega - \varepsilon)}{2m\cos(\omega - 2\varepsilon)}.$$

Cas d'un massif limité par un mur à face postérieure plane et polie.

23. Supposons, en deuxième lieu, que la face postérieure plane OM' du mur (fig. 2) soit polie. Alors la couche terreuse infiniment mince OM' ne doit supporter que des pressions normales, ce qui revient à dire qu'elle contient en chacun de ses points la direction d'une des deux dilatations principales ∂_1, ∂_3. Or nous avons appelé ε', au n° 20, l'inclinaison d'une quelconque de ces dilatations sur l'horizon, ou celle de l'autre sur la verticale. On devra prendre par conséquent

$$(63) \quad \varepsilon' = \text{GOM}',$$

et, d'après la formule (59), dans laquelle le dernier terme peut être choisi à volonté négatif ou positif, $\varepsilon = \varepsilon' - \frac{\pi}{4}$. Donc ε doit être encore le même en tous les points de OM', c'est-à-dire à toutes les distances l de OA, comme au numéro précédent, en sorte que l'équation (56) oblige de poser

$$c = 0, \quad c' = \operatorname{tg}(\omega - 2\varepsilon) = -\operatorname{cotg}(\omega - 2\varepsilon').$$

En outre, la couche OM' peut bien glisser dans son plan, mais non le quitter. Je ferai abstraction du mouvement que la particule O, située à l'origine des coordonnées, peut éprouver le long de OM', ou, ce qui revient au même, je supposerai les axes Ox, Oy animés d'une translation telle, que l'origine O coïncide toujours avec cette particule. On aura donc, pour $x = 0$ et $y = 0$, $u = 0$, $v = 0$, ce qui revient à prendre, dans les formules (48), $c'_1 = 0$, $c''_1 = 0$. Il reste alors, pour avoir complétement satisfait à la seconde ligne des relations (37), à exprimer que les points de la couche OM' se déplacent suivant sa propre direction OM', inclinée de $\alpha + \varepsilon'$ sur les y positifs, c'est-à-dire à déterminer c'' de manière qu'on ait en tous ces points $\frac{u}{v} = \frac{x}{y} = \operatorname{tg}(\alpha + \varepsilon') = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\omega - 2\varepsilon'}{2}\right)$. Or les valeurs (48) de u et v, où l'on

Digitized by Google

a déjà $c=0$, $c'_1=0$, $c''_1=0$, $c'=-\cot g(\omega-2\varepsilon')$, changent cette dernière condition en celle-ci

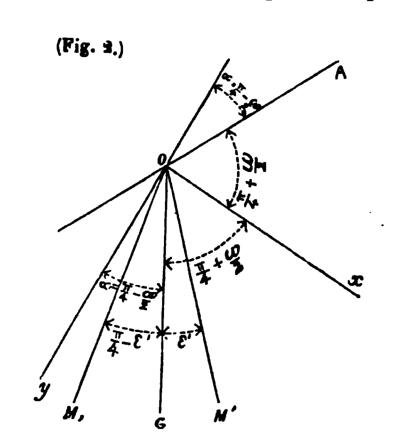
$$\frac{u}{v} \text{ ou } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega-2\varepsilon'}{2}\right)=\frac{\frac{x}{y}+(c'+c'')}{-1+\frac{x}{y}(c'-c'')}=\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega-2\varepsilon'}{2}\right)-\cot(\omega-2\varepsilon')+c''}{-1-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega-2\varepsilon'}{2}\right)\left[\cot(\omega-2\varepsilon')+c''\right]},$$

qui, simplifiée par la substitution à $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega-2\varepsilon'}{2}\right)$ de $\frac{\cos(\omega-2\varepsilon')}{1+\sin(\omega-2\varepsilon')}$ et résolue par rapport à c'', donne enfin

$$c''=0.$$

Parmi tous les modes possibles d'équilibre du massif indéfini, il y en a donc un et un seul pour lequel une couche plane et donnée de matière pulvérulente ne supporte aucune pression tangentielle et n'éprouve de déplacements que dans son plan : on l'obtient en supposant nulle la constante c et en prenant alors le paramètre angulaire ε, qui reste seul caractéristique du mode d'équilibre, égal à l'inclinaison de cette couche sur la verticale moins 45° ou $\frac{\pi}{4}$. Ce mode d'équilibre subsisterait si, pendant que le massif, devenu pesant après avoir été d'abord dans l'état naturel, éprouve les déformations étudiées, toute sa partie située d'un côté de la couche considérée OM' *était remplacée par un mur de soutènement infiniment poli.*

(Fig. 2.)



On se fait une idée nette du tassement qui se produit dans le cas actuel d'un mur poli, ayant OM' pour face postérieure, en concevant, au lieu de ce mur poli, un mur rugueux OM_1 incliné sur celui-ci de 45°, ou faisant avec Oy l'angle $yOM_1=\alpha+\varepsilon'-\frac{\pi}{4}$, et en considérant le tassement, parallèle à OM_1, qui se produirait alors. Ce tassement, à une distance D de OM_1, sera égal à

$$(64) \quad \ldots\ldots\ldots \quad D\frac{\sin\omega}{m\cos(\omega-2\varepsilon)}=-D\frac{\sin\omega}{m\sin(\omega-2\varepsilon')}.$$

Digitized by Google

Pour amener le massif AOM′ à son état définitif, il suffira de concevoir ensuite qu'il tourne en bloc autour de l'origine O, dans le sens de Oy vers Ox, de la petite quantité

$$(64^{bis}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \zeta' = \frac{\sin\omega}{2m\cos(\omega - 2\varepsilon)} = -\frac{\sin\omega}{2m\sin(\omega - 2\varepsilon')},$$

en vue d'annuler la rotation égale et contraire éprouvée dans ce tassement fictif, d'après (62bis), par la ligne matérielle primitivement couchée contre le mur réel OM′ et qui ne reçoit effectivement aucune rotation autour de O.

L'inclinaison du talus, ou de la surface OA, sur le mur OM′, diminue en somme par le fait du tassement, conformément à la formule (62ter), du petit angle

$$(64^{ter}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \zeta - \zeta' = \frac{\sin\omega\cos 2(\omega - \varepsilon)}{2m\cos(\omega - 2\varepsilon)} = \frac{\sin\omega\sin 2(\omega - \varepsilon')}{2m\sin(\omega - 2\varepsilon')}.$$

Les modes d'équilibre du massif indéfini ne peuvent pas satisfaire, dans d'autres cas, aux conditions (37).

24. Les formules (48), (49), (50) ne vérifient, tout le long d'une ligne située dans le plan des xy, les deux premières ou les deux dernières des relations (37), dans aucun autre cas que ceux que nous venons d'examiner, c'est-à-dire dans aucun cas où la ligne dont il s'agit serait courbe.

C'est ce qu'on reconnaît d'abord facilement pour les deux premières conditions (37). Si l'on pose en effet $u = 0$, $v = 0$ dans les formules (48), la première devient l'équation d'une parabole du second degré dont l'axe est parallèle à celui des x, tandis que la deuxième devient l'équation d'une parabole du second degré ayant son axe parallèle à celui des y. Ces paraboles ne peuvent évidemment coïncider sur une longueur finie qu'autant qu'elles se réduisent à des droites ou qu'on a $c = 0$, ce qui nous ramène au cas étudié dans le n° 22.

Cherchons actuellement à vérifier les deux dernières relations (37) en tous les points d'une même ligne courbe.

Si l'on porte les valeurs (49) de ∂_x, $-\partial_y$, g_{xy} dans les formules (33) de $\sin 2\beta_0$, $\cos 2\beta_0$, on trouve

$$\sin 2\beta_0 = \frac{c' + cl}{\mp\sqrt{(c' + cl)^2 + 1}}, \quad \cos 2\beta_0 = \frac{1}{\mp\sqrt{(c' + cl)^2 + 1}},$$

Digitized by Google

où le radical doit être pris avec le même signe de part et d'autre. L'avant-dernière relation (37) donne d'ailleurs

$$(65) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \operatorname{tg}\gamma = -\frac{u}{v},$$

et par suite

$$\cos 2\gamma = \frac{v^2 - u^2}{v^2 + u^2}, \quad \sin 2\gamma = \frac{-2uv}{v^2 + u^2}.$$

La dernière équation (37), qui n'est autre que

$$\cos 2\beta_0 \sin 2\gamma - \sin 2\beta_0 \cos 2\gamma = 0,$$

revient donc a

$$(65^{bis}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (v^2 - u^2)(c' + cl) + 2uv = 0.$$

Il suffit de remplacer dans celle-ci u, v, l par leurs valeurs (48) et (39) pour avoir l'équation finie, entière et rationnelle, de la ligne cherchée.

D'autre part, γ désignant l'angle que fait avec les x la normale à cette ligne, le coefficient angulaire $\frac{dy}{dx}$ de celle-ci est en chaque point égal à $-\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma}$ ou à $\frac{v}{u}$, et l'on a

$$udy - vdx = 0;$$

cette équation différentielle, d'après les valeurs (48) de u et v, s'intègre immédiatement. Si l'on appelle c''' la constante arbitraire introduite par l'intégration, il vient

$$(65^{ter}) \quad \frac{c}{5}(y^3 \sin\alpha - x^3 \cos\alpha) + xy + \frac{c'}{2}(y^2 - x^2) + \frac{c''}{2}(y^2 + x^2) + c_1' y - c_1'' x + c''' = 0.$$

Pour que la ligne (65ter), qui est du troisième degré, ait un arc *courbe* commun avec la ligne du cinquième degré que représente (65bis), il est nécessaire que les premiers membres de leurs équations admettent un facteur commun fonction des deux variables x, y et au moins du second degré. En particulier, leurs termes de l'ordre le plus élevé, qui sont, à part des coefficients constants et finis,

$$c\,(x^3 \cos\alpha - y^3 \sin\alpha)$$

Digitized by Google

pour (65ter), et, vu les valeurs (48) et (39) de u, v, l,

$$c^5 (x \cos\alpha + y \sin\alpha)(x^4 \cos^4\alpha - y^4 \sin^4\alpha)$$

pour (65bis), devront avoir, s'ils ne sont pas identiquement nuls, un facteur commun de ce degré. Comme ils n'en admettent pas, il faut que ces termes disparaissent ou qu'on ait $c = 0$. Mais alors, d'après les formules (56) et (59), les angles ε', qui mesurent l'inclinaison, sur la verticale, des dilatations principales, sont constants en tous les points du milieu, et les surfaces qui ne supportent que des pressions normales, ou sur toute l'étendue desquelles la dernière relation (37) est vérifiée, se réduisent à des plans.

---

§ VI.

DES MODES D'ÉQUILIBRE QUI CESSENT D'ÊTRE POSSIBLES, PAR SUITE DES LIMITES D'ÉLASTICITÉ DE LA MATIÈRE PULVÉRULENTE.

Conditions exprimant que les limites d'élasticité ne sont pas dépassées.

25. Pour tous les corps qui tendent à reprendre leur forme quand on les en a écartés, il existe ce qu'on appelle des *limites d'élasticité,* c'est-à-dire des valeurs maxima que ne peuvent dépasser en chaque point les dilatations principales ∂_1, ∂_2, ∂_3, sans qu'il se produise une altération persistante et sensible de leur arrangement moléculaire primitif, sinon même une rupture. En particulier, les milieux pulvérulents présentent, au moment où leurs limites d'élasticité sont atteintes, cet état d'équilibre instable qui leur permet de s'ébouler et qu'on appelle *état ébouleux.*

L'existence d'une limite d'élasticité dans les milieux pulvérulents est prouvée par ce fait, qu'ils sont dénués de cohésion, c'est-à-dire incapables


Digitized by Google

d'exercer ou de transmettre une traction, si faible qu'elle soit. En d'autres termes, la composante normale de la force élastique exercée sur un élément plan quelconque pris à leur intérieur ne peut pas être positive, ce qui, d'après la première formule (22), revient à dire qu'aucune des trois forces principales F_1, F_2, F_3, pas même la plus grande F_1, n'y devient jamais positive. La moyenne $-p$ de ces trois forces doit donc être constamment négative, et la condition

$$F_1 < 0, \quad \text{ou} \quad -p(1 - 2m\partial_1) < 0, \quad \text{ou enfin} \quad \partial_1 < \frac{1}{2m},$$

signifie alors que la dilatation linéaire la plus grande, ∂_1, à l'état élastique, doit rester toujours inférieure au rapport $\frac{1}{2m}$.

Mais bornons-nous au cas des déformations planes, pour lesquelles la dilatation linéaire moyenne ∂_2 est nulle, et qui, vu la relation d'incompressibilité $\partial_1 + \partial_3 = 0$, ou $\partial_3 = -\partial_1$, sont complétement définies en grandeur, dans une petite étendue autour d'un point quelconque, au moyen de la seule dilatation positive ∂_1. L'absence de cohésion du milieu prouve bien que ∂_1 y reste constamment inférieur au rapport $\frac{1}{2m}$, mais non pas que ∂_1 puisse atteindre cette limite sans que l'équilibre soit compromis. Tout ce qu'on peut en conclure, c'est que la limite d'élasticité est moindre que $\frac{1}{2m}$, ou égale à $\frac{\sin\varphi}{2m}$, si φ désigne un certain angle, compris entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, que l'expérience sera appelée à déterminer pour chaque espèce de corps pulvérulents et qui sera précisément ce qu'on appelle *angle de frottement intérieur*. Ainsi les deux conditions restrictives

$$(66) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad p > 0, \quad \partial_1 < \frac{\sin\varphi}{2m},$$

exprimant l'imperfection d'élasticité des massifs pulvérulents, seront imposées aux modes d'équilibre que ces corps peuvent présenter quand on les suppose parfaitement élastiques, et elles rendront impossible la réalisation de tous ceux d'entre ces modes qui n'y satisferaient pas en tous les points du massif.

On peut, dans la seconde inégalité (66), introduire les forces principales extrêmes F_1, F_3 au lieu de la dilatation maximum ∂_1. La première équation

Digitized by Google

(34^{quater}) [p. 34] donne en effet $R = 2mp\partial_1$, en sorte que l'inégalité (66), $\partial_1 < \frac{\sin\varphi}{2m}$, devient

$$(66^{bis}) \quad \frac{R}{p} < \sin\varphi, \quad \text{ou} \quad R < p\sin\varphi.$$

Or, d'après les relations (34ter), on a

$$-\frac{F_1 - F_3}{F_1 + F_3} = \frac{R}{p},$$

et l'inégalité (66bis) prend la forme cherchée

$$(66^{ter}) \quad -\frac{F_1 - F_3}{F_1 + F_3} < \sin\varphi, \quad \text{ou} \quad \frac{-F_1}{-F_3} > \frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Le rapport de la plus petite des pressions, exercées en un même point, à la plus grande, dépasse donc toujours $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$; *ce qui revient à dire que la différence de ces deux pressions est inférieure à la fraction* $\sin\varphi$ *de leur somme.*

La même inégalité est encore susceptible d'une autre interprétation. Considérons l'élément plan dont la normale est inclinée d'un angle quelconque β sur l'axe des x. La tangente de l'angle fait avec le prolongement de cette normale par la pression exercée sur l'élément plan, a pour valeur le rapport de la composante tangentielle $\mathfrak{T}$ de cette force à sa composante normale changée de signe (*ou pression proprement dite*) $-\mathfrak{N}$. Or les formules (32) donnent

$$\frac{\mathfrak{T}}{-\mathfrak{N}} = \frac{R\sin 2(\beta - \beta_0)}{p + R\cos 2(\beta - \beta_0)},$$

et ce rapport, nul quand $\sin 2(\beta - \beta_0) = 0$, ou pour $\beta - \beta_0 = 0, = \frac{\pi}{2}, = \frac{3\pi}{2}$, etc., atteint ses valeurs absolues maxima quand la dérivée

$$\frac{d}{d\beta}\left(\frac{\mathfrak{T}}{-\mathfrak{N}}\right) = \frac{2R[p\cos 2(\beta - \beta_0) + R]}{[p + R\cos 2(\beta - \beta_0)]^2}$$

s'annule, c'est-à-dire quand on a

$$(67) \quad \cos 2(\beta - \beta_0) = -\frac{R}{p}.$$

Digitized by Google

Alors l'inclinaison de la pression sur le prolongement de la normale, inclinaison maxima que j'appellerai φ', a pour tangente

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{\mathrm{R} \sin 2(\beta - \beta_0)}{p + \mathrm{R} \cos(\beta - \beta_0)} = \frac{\pm \frac{\mathrm{R}}{p} \sqrt{1 - \frac{\mathrm{R}^2}{p^2}}}{1 - \frac{\mathrm{R}^2}{p^2}} = \pm \frac{\frac{\mathrm{R}}{p}}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{R}^2}{p^2}}};$$

cette relation équivaut à $\sin^2 \varphi' = \frac{\mathrm{R}^2}{p^2}$, et donne, d'après ($66^{bis}$),

$$(67^{bis}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \sin^2 \varphi' < \sin^2 \varphi.$$

La seconde condition (66) signifie donc encore que *l'inclinaison d'une pression quelconque sur le prolongement de la normale à l'élément plan qu'elle sollicite, doit toujours, pour que l'équilibre soit possible, être inférieure ou au plus égale à l'angle de frottement intérieur* φ.

L'inclinaison dont il s'agit atteint d'ailleurs sa valeur absolue maxima $\pm \varphi'$ quand on a

$$\cos 2(\beta - \beta_0) = -\frac{\mathrm{R}}{p} = -\sin \varphi' = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi'\right),$$

et par suite, sauf un nombre entier de demi-circonférences, quand

$$\beta - \beta_0 = \pm\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2}\right).$$

Or, d'après la réflexion qui termine le n° 15 (p. 34), β_0 représente l'inclinaison de la force principale la plus petite F_3 sur les x positifs : l'excès $\beta - \beta_0$ désigne donc l'angle de cette force et de la normale aux éléments plans dont il s'agit, ou celui que font les mêmes éléments plans avec l'élément plan principal soumis à la force considérée F_3. Si l'on observe enfin que cette force est négative et constitue par conséquent, en valeur absolue, la plus grande des pressions principales, l'égalité ci-dessus reviendra au théorème suivant, énoncé en premier lieu par Macquorn-Rankine : *les éléments plans pour lesquels l'inclinaison de la pression qu'ils supportent sur le prolonge-*

Digitized by Google

ment de leur normale atteint sa valeur maxima φ', sont ceux qui font, avec l'élément plan principal soumis à la pression la plus grande, un angle égal à $\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi'}{2}$, et qui font par suite, avec l'élément plan soumis à la pression la plus petite, l'angle complémentaire $\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi'}{2}$.

26. L'inégalité (66ter) se change en égalité au moment où le massif, sur le point de se rompre, passe de l'*état élastique* à l'*état ébouleux* : l'*équilibre-limite* qui se produit à ce moment est donc caractérisé par la relation

Équation caractéristique de l'équilibre-limite, soit pour les massifs pulvérulents à l'*état ébouleux*, soit pour les solides à l'*état plastique*.

(68) . . . . $F_1 - F_3 = -(F_1 + F_3)\sin\varphi.$

Les corps solides présentent aussi un équilibre-limite quand on leur applique d'assez fortes pressions; mais l'équation spéciale à l'*état plastique*, qu'ils affectent alors, ne peut s'établir qu'au moyen de considérations un peu moins simples, même quand on se borne à l'étude d'une matière isotrope, c'est-à-dire constituée pareillement dans toutes les directions, et au cas de déformations planes, ou telles qu'une des trois dilatations principales, ∂_2, soit nulle. Ces corps, soumis à des actions inégales en divers sens et très-graduellement croissantes, commencent à éprouver des déformations permanentes sensibles dès que les deux autres dilatations principales ∂_1, ∂_3, produites en un point, acquièrent des valeurs vérifiant la relation $\partial_1 - \partial_3 = f(\partial_1 + \partial_3)$, où f désigne une certaine fonction positive : on dit alors que les *limites d'élasticité* de la matière sont *atteintes*. Les actions déformatrices continuant à croître, les positions d'*état naturel* (ou à partir desquelles se comptent les déplacements élastiques) des diverses particules qui constituent le corps, changent à chaque instant; d'ailleurs, l'expérience montre que, si l'on s'oppose à la désagrégation au moyen de pressions convenablement appliquées, le corps reste constitué par rapport à ces nouvelles positions d'équilibre (sauf une légère altération de l'isotropie), comme il l'était dans son état primitif par rapport aux premières, en ce sens que ses coefficients d'élasticité λ, μ changent peu : mais en même temps sa structure moléculaire devient plus stable, car la fonction f, qui mesure à chaque instant la plus grande déformation élastique possible $\partial_1 - \partial_3$, se transforme et croît, pour

Digitized by Google

une valeur déterminée de la dilatation cubique $\partial_1 + \partial_3$, de manière que la persistance des mêmes actions n'amène pas sans cesse de nouvelles déformations. Enfin, les actions déformatrices grandissant encore, il arrive un moment où la fonction f atteint une valeur maxima qu'elle ne peut pas dépasser, et où, par conséquent, le corps n'est plus apte à prendre une constitution qui permette aux déformations de s'arrêter. L'équilibre-limite, caractéristique de l'état plastique, se produit à ce moment. Or si, dans la relation $\partial_1 - \partial_3 = f(\partial_1 + \partial_3)$, on substitue à ∂_1, ∂_3 leurs expressions tirées des formules (5) (où on peut faire $A = 0$, $\partial_2 = 0$), il vient

$$F_1 - F_3 = 2\mu f\left(\frac{F_1 + F_3}{2\lambda + 2\mu}\right):$$

c'est l'équation cherchée.

En général, les corps très-malléables, que l'on a ici particulièrement en vue, résistent bien moins aux changements de forme qu'aux changements de volume, et l'inverse, $\lambda + \frac{2}{3}\mu$, de leur coefficient de compressibilité, doit être très-grand par rapport à leur coefficient de rigidité μ : on peut alors supposer à une première approximation $2\lambda + 2\mu = \infty$, quand $F_1 + F_3$ n'est pas d'un ordre de grandeur plus élevé que $F_1 - F_3$; et l'équation précédente se réduit à

$$F_1 - F_3 = 2\mu f(0) = \text{une constante } 2K,$$

conformément au principe fondamental de *plasticodynamique* que M. de Saint-Venant a posé comme résultant des expériences de M. Tresca *Sur le poinçonnage des métaux* (*). Mais il est préférable de garder en outre, dans le développement de la fonction f par la série de Maclaurin, le terme du premier degré par rapport à $F_1 + F_3$, ce qui, en observant que f croît probablement avec la densité ou avec la pression moyenne, donnera une équation de la forme

$$(68^{bis}) \quad F_1 - F_3 = 2K - a(F_1 + F_3).$$

(*) Voir au *Journal de Mathématiques* de M. Liouville (t. XVI, 1871) divers mémoires de M. de Saint-Venant sur ce sujet, notamment celui qui est extrait du *Compte-rendu* de la séance du 7 mars 1870 de l'Académie des sciences de Paris (t. LXX, p. 473) et où se trouve posée en d'autres termes la formule $F_1 - F_3 = 2K$. Le Mémoire très-intéressant de M. Tresca sur le poinçonnage a paru au t. XX du *Recueil des savants étrangers* de la même Académie (1872).


Digitized by Google

On voit que la formule de l'état ébouleux n'est qu'un cas particulier de celle-ci, le cas où $K = 0$ et où $a = \sin \varphi$. Dans ce cas particulier, la démonstration en est plus simple pour deux raisons : 1° il ne paraît pas y avoir, chez les corps pulvérulents, différentes constitutions moléculaires de plus en plus stables susceptibles de se produire successivement à mesure que les actions déformatrices croissent, ou, en d'autres termes, la période intermédiaire pendant laquelle la fonction f grandit, et qu'on appelle improprement *période d'élasticité imparfaite,* ne paraît pas exister pour eux ; 2° la dilatation cubique $\partial_1 + \partial_3$ y est sensiblement nulle. Par suite, l'équation de l'équilibre-limite se réduit à $\partial_1 - \partial_3 = f(0)$, ou à $\partial_1 =$ constante, comme on a vu.

Il est probable que les mêmes causes de simplification se présentent pour les corps solides très-malléables, comme le plomb ou l'argile : la seconde semble nécessaire pour qu'on puisse supposer la valeur élastique maxima de $\partial_1 - \partial_3$ peu dépendante de $\partial_1 + \partial_3$, ou admettre approximativement l'équation d'équilibre-limite $F_1 - F_3 =$ une constante $2K$. La première l'est peut-être aussi pour que la fonction f, à l'instant où l'équilibre devient limite, ne dépende pas des valeurs successives prises jusqu'à ce moment par les déformations ∂_1, ∂_3 ou par les pressions principales F_1, F_3. S'il en est ainsi, l'équation $F_1 - F_3 = 2\mu f\left(\frac{F_1 + F_3}{2\lambda + 2\mu}\right)$ ne conviendrait peut-être pas, avec une exactitude suffisante, aux corps élastiques qui sont susceptibles, comme le fer, de *s'écrouir* considérablement sous l'action de charges permanentes de plus en plus considérables, ou pour lesquels la forme de la fonction f, variable entre de larges limites, pourrait ne pas se trouver toujours la même à l'instant où l'état plastique s'établit.

27. Reprenons actuellement, au point de vue des inégalités (66), l'étude du massif de longueur et de profondeur indéfinies, limité supérieurement par un plan incliné de ω sur l'horizon. L'expression (60) de ∂_1, portée dans la seconde inégalité (66), qu'on peut supposer élevée au carré, change celle-ci en

Application aux modes d'équilibre précédemment considérés.

$$(69) \quad \cos^2(\omega - 2\varepsilon) > \frac{\sin^2\omega}{\sin^2\varphi}.$$

Deux conséquences importantes résultent de la relation fondamentale (69):

1° Le premier membre de cette inégalité étant essentiellement moindre


Digitized by Google

que l'unité, le second doit l'être à plus forte raison : donc *l'inclinaison ω du talus par rapport à l'horizon est toujours inférieure ou au plus égale en valeur absolue à l'angle φ de frottement.* L'expérience a prouvé en effet depuis longtemps que les sables, les terres fraîchement remuées, les amas de petits cailloux, etc., ne peuvent se soutenir que sous des angles moindres qu'un certain angle-limite, constant pour une même espèce de matière, mais variable, quand cette espèce change, depuis 24° ou 26° (cendrée de plomb, graine de moutarde) jusqu'à 55° (sol le plus dense), et qu'on prend souvent dans la pratique égal à 45°. Les talus naturels d'éboulement, comme on en observe, par exemple, au pied des roches escarpées, le long des vallées ou dans les montagnes, sont environ de 31° pour le sable fin et sec, de 32° à 33° pour les marnes, les calcaires et les terres franches jetées à la brouette, de 37° pour les terres crayeuses, de 38° pour le sable quartzeux humide, de 45° pour le sable gypseux humide (*).

2° L'inégalité (69) devant être vérifiée à toutes les profondeurs dans l'intérieur du massif, le cosinus de l'angle $\omega - 2\varepsilon$ ne peut décroître en valeur absolue jusqu'à zéro, ni sa tangente grandir indéfiniment avec l. D'après la formule (56), on devra donc avoir $c = 0$, ou $\varepsilon =$ constante ; en d'autres termes, tous les modes d'équilibre pour lesquels la constante c n'est pas nulle sont irréalisables si le milieu pulvérulent est suffisamment profond. Par suite, *un massif indéfini ne comporte pas des modes réels d'équilibre différents de ceux que représentent les équations* (57) *et* (58) *quand on y suppose le paramètre angulaire ε constant, ou quand les déformations éprouvées sont les mêmes en tous les points.*

Il n'y a pas à se préoccuper de la première inégalité (66). En effet, d'après (56), l'expression (50) de p n'est autre que

$$p = \frac{\rho g l}{\cos\omega - \sin\omega \operatorname{tg}(\omega - 2\varepsilon)},$$

et elle sera supérieure à zéro si le terme positif cos ω, du dénominateur, est

(*) *Mémoire sur la poussée des terres*, par M. Saint-Guilhem, ingénieur en chef des ponts et chaussées (*Annales des ponts et chaussées*, t. XV, mai et juin 1858), note VII. — Voir aussi la *Mécanique appliquée* de M. Collignon, t. I, p. 478.

Digitized by Google

en valeur absolue plus grand que $\sin\omega \operatorname{tg}(\omega - 2\varepsilon)$. Or l'inégalité (69) peut s'écrire

$$\frac{\sin^2\omega}{\sin^2\varphi} < \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\omega-2\varepsilon)};$$

d'où l'on déduit

$$\sin^2\omega \operatorname{tg}^2(\omega-2\varepsilon) < \sin^2\varphi - \sin^2\omega,$$

et, à plus forte raison,

$$\sin^2\omega \operatorname{tg}^2(\omega-2\varepsilon) < 1 - \sin^2\omega = \cos^2\omega:$$

ainsi la valeur absolue de $\sin\omega \operatorname{tg}(\omega - 2\varepsilon)$ est bien inférieure à $\cos\omega$. L'inégalité (69), dans l'étude des modes d'équilibre du massif indéfini, tient donc lieu à elle seule des deux inégalités (66) que nous avions à considérer.

Limites entre lesquelles peut varier le paramètre angulaire ε, mesurant l'inclinaison, sur la verticale, des couches non dilatées ni contractées.

28. Mais continuons l'étude de l'inégalité (69).

Soit τ l'angle, compris entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, dont le cosinus a pour valeur

$$(70) \quad \cos\tau = \frac{\sin\omega}{\sin\varphi} \text{ (en valeur absolue).}$$

Comme le mode d'équilibre correspondant à une certaine valeur de ε subsiste sans modification quand ε grandit de $\frac{\pi}{2}$, on peut se borner, quel que soit ω, à considérer des valeurs de ε comprises dans un intervalle égal à $\frac{\pi}{2}$, et supposer par conséquent $\omega - 2\varepsilon$ variable seulement de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$. On aura ainsi $\cos(\omega - 2\varepsilon) > 0$, et l'inégalité (69), devenue

$$\cos(\omega - 2\varepsilon) > \cos\tau,$$

équivaudra à l'ensemble de ces deux :

$$(70^{bis}) \quad \omega - 2\varepsilon \begin{cases} > -\tau, \\ < \tau, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \varepsilon \begin{cases} > \dfrac{\omega-\tau}{2}, \\ < \dfrac{\omega+\tau}{2}. \end{cases}$$

Étant donnée une valeur quelconque ω de l'inclinaison du talus sur l'horizon, l'équilibre est donc possible : 1° quand l'inclinaison ε, sur la verticale,

Digitized by Google

d'une couche non dilatée ni contractée (ou par suite de la face postérieure rugueuse d'un mur de soutènement qui immobiliserait une telle couche dans ses positions d'état naturel), est précisément $\frac{\omega}{2}$; 2° quand cette inclinaison est inférieure ou supérieure à $\frac{\omega}{2}$ d'une quantité au plus égale à la moitié de l'angle τ que définit l'équation (70), ou, en d'autres termes, quand la direction d'une couche d'étendue invariable est comprise dans l'angle τ construit de manière que sa bissectrice soit inclinée de $\frac{\omega}{2}$ sur la verticale; 3° quand l'inclinaison ε ne diffère de l'une des précédentes que d'un nombre entier d'angles droits, c'est-à-dire, d'une manière générale, quand la direction de la couche considérée est comprise à l'intérieur de l'un des quatre angles, égaux à τ et opposés deux à deux par le sommet, qui ont pour bissectrices respectives la droite inclinée de $\frac{\omega}{2}$ sur la verticale et sa perpendiculaire.

Au contraire, l'équilibre devient impossible, avec la valeur donnée de l'inclinaison ω du talus, lorsque la direction d'une couche d'étendue invariable (ou de la face postérieure et rugueuse d'un mur de soutènement qui l'immobiliserait dans ses positions d'état naturel) tombe dans l'intervalle que laissent entre eux ces quatre angles. Enfin les inégalités précédentes se changent en égalités, et la limite d'élasticité est précisément atteinte, si ε acquiert ses valeurs extrêmes, $\frac{\omega \mp \tau}{2}$ plus un nombre entier d'angles droits, ce qui arrive lorsque les couches invariables se trouvent précisément parallèles à un côté des quatre mêmes angles; alors l'état devient *ébouleux* et l'équilibre est *limite*.

Pour $\omega = 0$, l'angle τ est droit et par suite les quatre angles dont il s'agit comprennent tout l'espace autour du point O, ou ne laissent subsister aucune direction ε pour laquelle l'équilibre soit impossible. Mais, à mesure que la valeur absolue de ω grandit, τ diminue de plus en plus pour s'annuler quand ω atteint ses deux valeurs extrêmes $\pm\varphi$. Ce décroissement de τ est même plus rapide que l'accroissement de $\pm\omega$; car la différentiation de (70) donne

$$\frac{-d\tau}{d\omega} = \frac{\cos\omega}{\sin\varphi \sin\tau} = \frac{\cos\omega}{\sqrt{\sin^2\varphi - \sin^2\omega}} = \sqrt{\frac{1-\sin^2\omega}{\sin^2\varphi - \sin^2\omega}} > 1 \quad \text{(en valeur absolue).}$$

Par conséquent, *lorsque* ω *croît de zéro à* φ *ou décroît de zéro à* $-\varphi$,


Digitized by Google

les deux valeurs extrêmes de ε, $\frac{\omega-\tau}{2}$ *et* $\frac{\omega+\tau}{2}$, *d'abord égales respectivement à* $-\frac{\pi}{4}$ *et à* $\frac{\pi}{4}$, *varient sans cesse chacune dans un même sens, la première en augmentant, la seconde en diminuant, jusqu'à leur valeur finale commune, qui est la moitié de celle de* ω, *c'est-à-dire* $\pm\frac{\varphi}{2}$. *Les quatre angles conjugués* τ *qui forment, par leur groupement symétrique autour du point* O, *une sorte de croix de Malte dont ils seraient les bras, et à l'intérieur desquels se trouvent à chaque instant les directions admissibles des couches invariables, se contractent à la fois, par un mouvement simultané de recul de leurs quatre côtés, de manière à délaisser entre eux un nombre de plus en plus grand de directions qui cessent d'être admissibles pour toutes les valeurs ultérieures de* ω (*).

Limites entre lesquelles doit être comprise l'inclinaison ω du talus pour une valeur donnée de ε.

29. Les deux limites, l'une négative et l'autre positive, entre lesquelles l'inclinaison ω, sur l'horizon, du talus supérieur doit être comprise pour que l'équilibre soit possible avec une inclinaison donnée ε, sur la verticale, des couches invariables, s'obtiennent aisément. L'inégalité (69) se change en égalité quand ω reçoit ces deux valeurs, et il vient, en extrayant la racine carrée des deux membres,

$$\sin\omega = \pm\sin\varphi\cos(\omega-2\varepsilon) = \pm\sin\varphi(\cos\omega\cos 2\varepsilon + \sin\omega\sin 2\varepsilon),$$

(*) Quand le massif est solide, δ_1, δ_3 ont les valeurs (60bis) [p. 45]. On voit que ces dilatations principales, si elles ne sont pas négatives, finiront par dépasser toute limite d'élasticité admissible, *dans un massif suffisamment profond*, lorsqu'on y prendra l ou p assez grands. On devra donc avoir $\delta < 0$; ce qui, en posant

$$(a) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \sin\varphi$$

où φ désigne un angle aigu, revient à écrire la première inégalité (66) et l'inégalité (69), c'est-à-dire précisément les deux mêmes conditions, résumées dans la condition unique (69), que pour un massif pulvérulent. Donc, tout ce qui est dit dans ce § au sujet des limites entre lesquelles ω et ε sont compris s'applique à un massif solide de grande profondeur, à cela près que l'équilibre sera stable pour les valeurs extrêmes $\pm\tau$ de $\omega - 2\varepsilon$ (vu qu'alors on aura $\delta_1 = 0$, $\delta_3 < 0$). En particulier, *l'inclinaison* $\pm\omega$ *dut alus devra être moindre que* φ, comme M. de Saint-Venant l'avait déjà reconnu. Cet angle φ vaudra 30° dans les corps *durs*, chez lesquels il est probable que le rapport $\frac{\mu}{\lambda}$ ne diffère pas sensiblement de l'unité, et il sera presque nul pour les corps *mous*, où le rapport $\frac{\mu}{\lambda}$ est sans doute voisin de zéro.


Digitized by Google

ou bien, si l'on résout par rapport à tg ω,

$$(71) \quad \ldots\ldots\ldots \operatorname{tg}\omega = \frac{\pm\sin\varphi\cos 2\varepsilon}{1\mp\sin\varphi\sin 2\varepsilon} = \frac{\pm\cos 2\varepsilon}{\frac{1}{\sin\varphi}\mp\sin 2\varepsilon}.$$

A ces deux valeurs de tg ω correspondront respectivement les deux angles-limites cherchés, compris, l'un entre zéro et $+\varphi$, l'autre entre zéro et $-\varphi$. On voit qu'ils échangent simplement leurs signes quand ε est changé en $-\varepsilon$, et on peut se borner à les calculer pour les valeurs positives de ε. Il suffit d'ailleurs d'y faire varier ε de zéro à $\frac{\pi}{4}$ ou 45°, puisque les mêmes circonstances se produisent pour toutes les valeurs de ε qui diffèrent les unes des autres d'un nombre entier d'angles droits.

Si l'on adopte pour φ la valeur $\frac{\pi}{4}$ ou 45°, l'expression de tg ω devient

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\pm\cos 2\varepsilon}{\sqrt{2}\mp\sin 2\varepsilon},$$

et l'on peut former le tableau suivant :

Valeurs de ε	0,	10°,	20°,	30°,	40°	45°,
valeurs-limites de ω . .	35°16′(*),	41°14′,	44°48′,	42°22′,	22°01′,	0,
	— 35°16,	— 28°09′,	— 20°26′,	— 12°22′,	— 4°08′,	0,

En différentiant l'équation (71), on trouve

$$\frac{d\operatorname{tg}\omega}{d\varepsilon} = \frac{\pm 2\sin\varphi(-\sin 2\varepsilon\pm\sin\varphi)}{(1\mp\sin\varphi\sin 2\varepsilon)^2}.$$

Lorsque ε croît de zéro à $\frac{\pi}{4}$, la valeur négative de ω, c'est-à-dire la limite inférieure, croît sans cesse en se rapprochant de zéro. Quant à la limite supérieure, ou valeur positive extrême de ω, elle grandit d'abord, jusqu'à un maximum, φ, qu'elle atteint pour $\varepsilon = \frac{\varphi}{2}$ (c'est-à-dire pour $\varepsilon = 22°\frac{1}{2}$

(*) Pour du sable fin et sec on aurait seulement $\varphi = 31°$, et les valeurs-limites qui correspondent à $\varepsilon = 0$ deviendraient $\pm 27°15'$.

Digitized by Google

quand $\varphi = 45°$), et elle décroît ensuite. Les deux limites, initialement égales, en valeur absolue, à arc tg (sin φ), mais de signes contraires, s'annulent en dernier lieu, pour $\varepsilon = \frac{\pi}{4}$.

On peut, au moyen des tangentes de ces angles-limites, que j'appellerai ω', ω'',

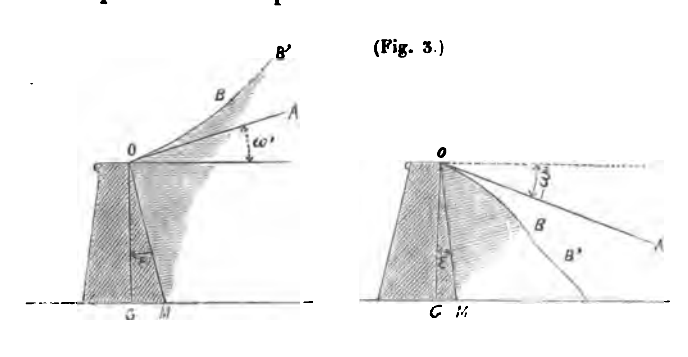
$$\operatorname{tg} \omega' = \frac{\sin \varphi \cos 2\varepsilon}{1 - \sin \varphi \sin 2\varepsilon}, \quad \operatorname{tg} \omega'' = \frac{-\sin \varphi \cos 2\varepsilon}{1 + \sin \varphi \sin 2\varepsilon},$$

calculer la tangente de leur différence $\omega' - \omega''$. Celle-ci se réduit, après quelques simplifications évidentes, à

$$\operatorname{tg} (\omega' - \omega'') = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} \cos 2\varepsilon :$$

elle diminue sans cesse quand ε grandit de zéro à $\frac{\pi}{4}$. *L'écart $\omega' - \omega''$ des deux limites est donc d'autant plus grand que l'inclinaison ε est moindre ou que les couches invariables s'écartent moins de la verticale.*

On voit qu'un mur de soutènement rugueux, incliné de ε sur la verticale et qui serait supposé *immobiliser la couche pulvérulente contiguë dans ses positions d'état naturel,* ne pourrait pas soutenir un massif limité supérieurement par un talus plan dont l'inclinaison sur l'horizon serait, ou plus grande que la limite positive ω', ou moindre que la limite négative ω''. Sans doute, la partie BB′ (fig. 3), d'un talus pareil, qui serait très-éloignée du mur de soutènement, pourrait recevoir toute déclivité inférieure ou même égale, en valeur absolue, à l'angle de frottement φ. Mais la surface du talus devrait alors cesser d'être plane dès qu'on approcherait du mur OM, de manière à y devenir concave vers en haut, pour ω positif, convexe dans le cas contraire, et à ne plus avoir, tout près du mur, son inclinaison ω sur l'horizon en dehors des deux limites ω', ω''.



Les formules établies ci-dessus ne sont pas applicables à de pareils talus courbes, et un calcul rigoureux de l'équilibre qui se produirait alors est peut-être inabordable; mais, si la courbure de la surface était peu sensible et que l'on se proposât seulement de connaître les circonstances produites à d'assez petites distances de l'origine O, on ne commettrait qu'une erreur négligeable en remplaçant le profil vrai du talus par sa tangente au départ OA, tangente dont l'inclinaison sur l'horizon égalerait la valeur-limite correspondante ω' ou ω''. En d'autres termes, le cas où l'angle ω se trouverait supérieur à ω' pourrait être approximativement confondu avec celui où $\omega = \omega'$, et le cas où ω serait moindre que ω'' pourrait de même n'être pas distingué du cas $\omega = \omega''$.

Au reste, cette remarque ne paraît pas avoir d'importance pratique, et pour deux raisons. La première consiste en ce que les murs rugueux de soutènement que l'on construit ne doivent immobiliser les particules pulvérulentes contiguës dans des positions d'état naturel, ou à peu près, que pendant la période même de formation du massif et seulement en ce qui concerne les couches de terre ou de sable non encore comprimées : à mesure qu'on apporte de nouvelles couches sur les premières, celles-ci éprouvent un grand nombre de ruptures à la suite desquelles les positions d'état naturel de leurs particules se trouvent entièrement changées, comme on verra au § VIII. La deuxième raison consiste en ce que l'inclinaison ε, sur la verticale, des murs de soutènement rugueux, supposés même capables d'immobiliser les particules terreuses contiguës dans leurs positions d'état naturel, a presque toujours, dans la pratique, des valeurs telles, que la limite supérieure ω' est voisine de son maximum φ, tandis que la limite négative ω'' se trouve bien au-dessous des inclinaisons des talus dont on peut avoir à s'occuper.

Néanmoins, il se produit souvent, pendant qu'on décharge contre la face postérieure d'un mur la terre ou le sable qu'il doit soutenir, des valeurs négatives de ω moindres que ω'', et il paraît que l'on constate alors sur le talus la forme convexe indiquée par la théorie précédente.

Limites qui comprennent ω pour une valeur donnée de ε'.

30. Je n'ai considéré ci-dessus qu'un mur à face postérieure plane et rugueuse. Supposons actuellement cette face infiniment polie et inclinée sur


Digitized by Google

la verticale d'un angle ε', mais toujours donnée de manière à empêcher la couche superficielle contiguë du massif de quitter son plan primitif; on a vu au n° 23 (p. 50) que l'équilibre, dans ces conditions, ne diffère pas de celui que produirait un mur rugueux incliné de $\varepsilon = \varepsilon' - \frac{\pi}{4}$, ou encore incliné de $\varepsilon = \varepsilon' + \frac{\pi}{4}$, puisqu'une différence de $\frac{\pi}{2}$ dans ces angles n'en amène aucune dans le mode d'équilibre. On aura donc, en particulier, les deux limites ω', ω'', qui comprennent entre elles toutes les valeurs admissibles de l'inclinaison du talus, en étendant, au moyen d'une observation qui suit la formule (71), le tableau précédent aux valeurs négatives de ε variables de $-\frac{\pi}{4}$ à zéro, et ajoutant alors, pour avoir ε', $\frac{\pi}{4}$ ou 45° à toutes les valeurs de ε inscrites au tableau. Il vient ainsi :

pour $\varepsilon' =$	0,	5°,	15°,	25°,	35°,	45°,	55°,	65°,	75°,	85°,	90°,
valeurs-limites de ω	0,	4°08′,	12°22′,	20°26′,	28°09′,	35°16′,	41°14′,	44°48′,	42°22′,	22°01′,	0,
	0,	−22°01′,	−42°22′,	−44°48′,	−41°14′,	−35°16′,	−28°09′,	−20°26′,	−12°22′,	− 4°08′,	0.

Les quatre angles, égaux à τ et symétriquement disposés en croix autour de l'origine O, qui contiennent, pour une valeur donnée de ω, toutes les directions admissibles de la face postérieure du mur, sont restés les mêmes en grandeur que dans le cas d'un mur rugueux; mais ils ont tourné d'un demi-angle droit, de manière à venir se placer précisément au milieu des quatre vides qu'ils laissaient d'abord entre eux. Si l'angle τ est supérieur à un demi-angle droit, il y aura, au milieu de chacune des quatre branches de l'une quelconque des deux croix, un espace angulaire, égal à $\frac{\pi}{2} - \tau$, qui ne lui sera pas commun avec l'autre croix; mais il restera, sur chaque bord de la branche considérée, une bande, égale à $\tau - \frac{\pi}{4}$, commune aux deux croix. Suivant toute direction comprise dans l'une de ces huit bandes, de largeur angulaire $\tau - \frac{\pi}{4}$, et qui sont symétriquement disposées par rapport aux bissectrices des huit angles formés entre les axes des deux croix, on peut, à l'exclusion du reste du plan, diriger la face postérieure d'un mur de soutènement, à volonté rugueux ou poli, capable de maintenir l'équilibre dans l'hypothèse où je me suis placé des relations spéciales (37). La condition nécessaire et suffisante pour que ces bandes existent est que τ soit plus grand

Digitized by Google

que $\frac{\pi}{4}$, ou $\cos\tau < \frac{1}{\sqrt{2}}$, c'est-à-dire, d'après (70), que l'on ait en valeur absolue

$$\sin\omega < \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}},$$

ou, en supposant $\varphi = 45°$,

$$\sin\omega < \frac{1}{2}, \quad \omega < 30°.$$

---

§ VII.

CALCUL DE LA PRESSION EXERCÉE SUR TOUT ÉLÉMENT DE SURFACE NORMAL AU PLAN DES DÉFORMATIONS, ET DE LA POUSSÉE TOTALE QUE SUPPORTE UN MUR PLAN DE SOUTÈNEMENT.

Formules qui donneront la direction φ_1 et la valeur $\mathfrak{R}$ de la pression $(-\mathfrak{N}, \mathfrak{T})$.

31. Il nous reste à étudier la pression, ayant pour composantes normale et tangentielle $-\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}$, que supporte par unité d'aire tout élément plan parallèle à l'axe des z, puis à évaluer la poussée totale qu'éprouve une section plane quelconque menée par cet axe dans le massif : cette poussée serait évidemment exercée sur un mur plan de soutènement dont la face postérieure coïnciderait avec la section considérée, si le massif, au lieu d'être indéfini, se trouvait réduit à sa partie située en arrière d'un tel mur, mais que la couche pulvérulente contiguë fût en même temps immobilisée dans les positions $x+u$, $y+v$, $z+w$ qu'elle occupe en effet dans le massif indéfini.

Soit ε_1 l'inclinaison, sur la verticale, d'un élément plan quelconque parallèle à l'axe des z. Les deux composantes $-\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{T}$ de la pression qu'il éprouve par unité d'aire, vaudront, d'après les relations (57) [p. 43],

$$(72) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} -\mathfrak{N} &= \frac{\rho g l}{\cos 2(\omega-\varepsilon)}\left[\cos(\omega-2\varepsilon) + \sin\omega\sin 2(\varepsilon_1-\varepsilon)\right], \\ \mathfrak{T} &= \frac{\rho g l}{\cos 2(\omega-\varepsilon)}\sin\omega\cos 2(\varepsilon_1-\varepsilon). \end{aligned} \right.$$

Digitized by Google

J'appellerai

$$\mathcal{R}$$

la pression totale dont les deux composantes, normale et tangentielle, sont $-\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{T}$,

$$\varphi_1$$

l'angle, compris au plus entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, qu'elle fait avec le prolongement de la normale à l'élément plan, et dont la tangente, $\frac{\mathfrak{T}}{-\mathfrak{N}}$, le définit complétement. On aura

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\mathfrak{T}}{-\mathfrak{N}}, \quad \mathcal{R} = \frac{\mathfrak{T}}{\sin\varphi_1},$$

ou bien

$$(72^{bis}) \quad . \quad \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\sin\omega\cos 2(\varepsilon_1-\varepsilon)}{\cos(\omega-2\varepsilon)+\sin\omega\sin 2(\varepsilon_1-\varepsilon)}, \quad \mathcal{R} = \frac{\sin\omega\cos 2(\varepsilon_1-\varepsilon)}{\cos 2(\omega-\varepsilon)\sin\varphi_1}\rho g l.$$

La première de ces formules présente l'inconvénient de n'être pas calculable par logarithmes. Il est préférable d'évaluer $\operatorname{tg}\left(\varphi_1+\varepsilon_1-\varepsilon\pm\frac{\pi}{4}\right)$ au moyen de la relation

$$\operatorname{tg}\left(\varphi_1+\varepsilon_1-\varepsilon\pm\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1+\operatorname{tg}\left(\varepsilon_1-\varepsilon\pm\frac{\pi}{4}\right)}{1-\operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{tg}\left(\varepsilon_1-\varepsilon\pm\frac{\pi}{4}\right)},$$

dans le second membre de laquelle on mettra pour $\operatorname{tg}\varphi_1$ sa valeur (72bis). Ce second membre deviendra beaucoup plus simple si l'on y remplace

$$\cos 2(\varepsilon_1-\varepsilon) \quad \text{ou} \quad \pm\sin 2\left(\varepsilon_1-\varepsilon\pm\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{par} \quad \pm 2\cos\left(\varepsilon_1-\varepsilon\pm\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\varepsilon_1-\varepsilon\pm\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\sin 2(\varepsilon_1-\varepsilon) \quad \text{ou} \quad \mp\cos 2\left(\varepsilon_1-\varepsilon\pm\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{par} \quad \mp\cos^2\left(\varepsilon_1-\varepsilon\pm\frac{\pi}{4}\right)\pm\sin^2\left(\varepsilon_1-\varepsilon\pm\frac{\pi}{4}\right).$$

On trouve alors

$$(72^{ter}) \quad . \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\varphi_1+\varepsilon_1-\varepsilon\pm\frac{\pi}{4}\right) &= \operatorname{tg}\left(\varepsilon_1-\varepsilon\pm\frac{\pi}{4}\right)\frac{\cos(\omega-2\varepsilon)\pm\sin\omega}{\cos(\omega-2\varepsilon)\mp\sin\omega} \\ &= \operatorname{tg}\left(\varepsilon_1-\varepsilon\pm\frac{\pi}{4}\right)\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\omega+2\varepsilon\pm\omega\right)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\omega+2\varepsilon\mp\omega\right)}. \end{aligned} \right.$$

Digitized by Google

Cette formule, dans laquelle on peut prendre à volonté, soit les signes supérieurs, soit les signes inférieurs, fera connaître sans aucune indétermination l'angle φ_1, qui fixe la direction de la pression, dès qu'on aura donné l'inclinaison ω du talus supérieur sur l'horizon, l'angle ε_1 que fait l'élément plan avec la verticale et le paramètre ε caractéristique du mode d'équilibre. La seconde relation (72bis) permettra de calculer ensuite par logarithmes la grandeur $\mathcal{R}$ de la pression par unité d'aire, si l'on connaît en outre la profondeur l à laquelle est situé l'élément plan, c'est-à-dire sa distance normale au talus supérieur, et le poids ρg de l'unité de volume apparent du massif.

On obtient entre $\mathcal{N}$ et $\mathcal{T}$ une relation extrêmement simple, en ajoutant les deux équations (72) après les avoir respectivement multipliées par $-\sin(\omega-\varepsilon_1)$, $\cos(\omega-\varepsilon_1)$, en remplaçant ensuite, dans le second membre, des termes affectés de $\sin\omega$ par leur valeur totale

$$\sin\omega\cos(\omega-2\varepsilon+\varepsilon_1)=\sin\omega\left[\cos(\omega-2\varepsilon)\cos\varepsilon_1-\sin(\omega-2\varepsilon)\sin\varepsilon_1\right],$$

et de même le terme $-\sin(\omega-\varepsilon_1)\cos(\omega-2\varepsilon)$ par

$$\cos(\omega-2\varepsilon)\left[-\sin\omega\cos\varepsilon_1+\cos\omega\sin\varepsilon_1\right],$$

puis en réduisant. Il vient

$$(72^{quater}) \quad \ldots\ldots \quad \mathcal{N}\sin(\omega-\varepsilon_1)+\mathcal{T}\cos(\omega-\varepsilon_1)=\rho g l\sin\varepsilon_1.$$

Cette formule n'est qu'une application particulière du théorème, dit *de réciprocité,* qu'expriment les relations (21) [p. 26] : son premier membre représente la projection, sur la normale au talus supérieur, de la force élastique éprouvée par l'élément plan d'inclinaison ε_1, et le second membre est la projection, sur la normale à cet élément plan, de la force élastique que supporte un autre élément plan passant par le même point, mais parallèle au talus supérieur : or le théorème cité apprend que ces deux projections doivent être égales.

Comment les deux composantes $-\mathcal{N}$, $\mathcal{T}$ varient avec ε.

32. Cherchons comment varient les deux composantes $-\mathcal{N}$, $\mathcal{T}$ de la pression $\mathcal{R}$ exercée sur un même élément plan, quand on fait changer le mode d'équilibre, c'est-à-dire quand on fait varier le paramètre angulaire ε.



D'après la relation (70bis), il suffira de faire croître ε de $\frac{\omega-\tau}{2}$ à $\frac{\omega+\tau}{2}$, ou de faire décroître $2(\omega-\varepsilon)$ de $\omega+\tau$ à $\omega-\tau$, c'est-à-dire d'une limite supérieure moindre que $\frac{\pi}{2}$ à une limite inférieure plus grande que $-\frac{\pi}{2}$. Dans cet intervalle, les expressions (72) de $-\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}$ restent constamment finies et continues. Le dénominateur $\cos 2(\omega-\varepsilon)$ s'annule bien aux deux limites dans le cas particulier $\omega=0$, $\tau=\frac{\pi}{2}$; mais les numérateurs s'annulent en même temps et les valeurs de $-\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}$, prises à ces deux limites, tendent, à mesure que ω décroît jusqu'à zéro, vers les valeurs parfaitement déterminées que donneraient les formules (77) ci-après.

Différentions donc, par rapport à ε, les expressions (72) de $-\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}$, et remplaçons, dans les résultats,

$$\sin 2(\omega-\varepsilon)\cos(\omega-2\varepsilon)-\cos 2(\omega-\varepsilon)\sin(\omega-2\varepsilon) \text{ par } \sin[2(\omega-\varepsilon)-(\omega-2\varepsilon)]=\sin\omega,$$
$$\cos 2(\omega-\varepsilon)\cos 2(\varepsilon_1-\varepsilon)+\sin 2(\omega-\varepsilon)\sin 2(\varepsilon_1-\varepsilon) \text{ par } \cos 2(\omega-\varepsilon_1),$$
$$\sin 2(\omega-\varepsilon)\cos 2(\varepsilon_1-\varepsilon)-\cos 2(\omega-\varepsilon)\sin 2(\varepsilon_1-\varepsilon) \text{ par } \sin 2(\omega-\varepsilon_1):$$

il viendra simplement

$$(73) \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d(-\mathfrak{N})}{d\varepsilon} &= \frac{-2\rho g l \sin\omega\,[1+\cos 2(\omega-\varepsilon_1)]}{\cos^2 2(\omega-\varepsilon)}, \\ \frac{d\mathfrak{T}}{d\varepsilon} &= \frac{-2\rho g l \sin\omega \sin 2(\omega-\varepsilon_1)}{\cos^2 2(\omega-\varepsilon)}. \end{aligned} \right.$$

Ces dérivées de $-\mathfrak{N}$ et de $\mathfrak{T}$ ont constamment les mêmes signes quel que soit ε : la première est négative ou positive suivant que l'inclinaison ω, sur l'horizon, du talus supérieur est positive ou négative elle-même; la seconde a le même signe que la première quand le sinus de l'angle $2(\omega-\varepsilon_1)$ est positif, signe contraire dans le cas où ce sinus est négatif. *Chacune des deux composantes* $-\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}$ *varie donc sans cesse dans un même sens lorsque* ε *grandit, et se trouve comprise à tout instant entre les deux valeurs extrêmes qu'elle reçoit pour* $\varepsilon=\frac{\omega\mp\tau}{2}$ *: de plus, si l'on veut avoir la valeur la plus petite de la poussée normale* $-\mathfrak{N}$, *il faut prendre* $\varepsilon=\frac{\omega+\tau}{2}$ *ou* $\varepsilon=\frac{\omega-\tau}{2}$ *suivant que* ω *est* $>$ *ou* $<$ zéro.

La deuxième formule (73) aurait pu être déduite de la première et de la

Digitized by Google

relation (72^{quater}), qui donne $\mathcal{T}$ en fonction linéaire de $\mathcal{N}$ sans qu'aucun coefficient de cette fonction dépende de ε, et d'après laquelle le rapport des deux dérivées $\frac{d\mathcal{T}}{d\varepsilon}$, $\frac{d(-\mathcal{N})}{d\varepsilon}$ égale tg $(\omega - \varepsilon_1)$.

Valeurs extrêmes des composantes $-\mathcal{N}$, $\mathcal{T}$. — Étude des deux modes d'équilibre-limite que peut présenter le massif indéfini.

33. Évaluons les valeurs extrêmes de $-\mathcal{N}$, et d'abord celles qui correspondent à $\varepsilon = \frac{\omega + \tau}{2}$ pour ω positif, à $\varepsilon = \frac{\omega - \tau}{2}$ pour ω négatif, et par conséquent à la moindre valeur de $-\mathcal{N}$.

J'appellerai ψ l'angle auxiliaire, compris entre 0 et $\frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}$ quand ω est > 0, entre 0 et $-\frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}$ quand ω est < 0, que définit l'équation

$$(74) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \sin(\omega + 2\psi) = \frac{\sin\omega}{\sin\varphi}.$$

Cette équation, comparée à (70), montre que τ vaut le complément de la valeur absolue de $\omega + 2\psi$, ou qu'on a

$$(74^{bis}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \tau = \frac{\pi}{2} \mp (\omega + 2\psi),$$

et par suite

$$(74^{ter}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad -2\varepsilon \text{ ou } -(\omega \pm \tau) = \mp\frac{\pi}{2} + 2\psi,$$

$$2(\omega - \varepsilon) = \mp\frac{\pi}{2} + 2(\omega + \psi), \quad 2(\varepsilon_1 - \varepsilon) = \mp\frac{\pi}{2} + 2(\varepsilon_1 + \psi), \quad \omega - 2\varepsilon = \mp\frac{\pi}{2} + (\omega + 2\psi).$$

Les formules (72), si on y porte ces valeurs de $2(\omega - \varepsilon)$, $2(\varepsilon_1 - \varepsilon)$, $\omega - 2\varepsilon$, deviennent

$$(75) \quad \mathcal{T} = \frac{\sin\omega \sin 2(\varepsilon_1 + \psi)}{\sin 2(\omega + \psi)}\rho g l, \quad -\mathcal{N} = \frac{\sin(\omega + 2\psi) - \sin\omega\cos 2(\varepsilon_1 + \psi)}{\sin 2(\omega + \psi)}\rho g l.$$

L'expression (75) de $\mathcal{T}$ paraît indéterminée quand $\omega = 0$. On peut la transformer en y faisant successivement

$$(75^{bis}) \quad \sin 2(\omega + \psi) = 2\sin(\omega + \psi)\cos\psi\frac{\cos(\omega + \psi)}{\cos\psi} = [\sin(\omega + \psi - \psi) + \sin(\omega + \psi + \psi)]\frac{\cos(\omega + \psi)}{\cos\psi},$$

Digitized by Google

et en y remplaçant alors le rapport

$$\frac{\sin\omega}{\sin\omega+\sin(\omega+2\psi)},\quad \text{ou, d'après (74),}\quad \frac{\sin\varphi\sin(\omega+2\psi)}{\sin\varphi\sin(\omega+2\psi)+\sin(\omega+2\psi)},$$

par

$$\frac{\sin\varphi}{1+\sin\varphi}=\frac{\sin\varphi}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

Il viendra ainsi

$$(76)\;\ldots\ldots\;\mathcal{T}=\frac{\rho g l\sin\varphi}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}\cdot\frac{\cos\psi\sin 2(\varepsilon_1+\psi)}{\cos(\omega+\psi)}.$$

Quant à l'expression (75) de $-\mathcal{N}$, elle n'est pas calculable par logarithmes; mais on obtiendra $-\mathcal{N}$, dès que $\mathcal{T}$ aura été évalué au moyen de (76), si on connaît l'angle φ_1 qui mesure l'inclinaison de la pression résultante $\mathcal{R}$, appliquée à l'élément plan considéré, sur le prolongement de la normale à cet élément plan. La formule (72ter), en y faisant d'après (74ter) $-\varepsilon=\mp\frac{\pi}{4}+\psi$ et aussi $\cos(\omega-2\varepsilon)=\pm\sin(\omega+2\psi)=\pm\frac{\sin\omega}{\sin\varphi}$, donnera, pour le calcul de cet angle,

$$(76^{bis})\;\ldots\;\operatorname{tg}(\varphi_1+\varepsilon_1+\psi)=\operatorname{tg}(\varepsilon_1+\psi)\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}=\frac{\operatorname{tg}(\varepsilon_1+\psi)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

Enfin, on aura

$$-\mathcal{N}=\frac{\mathcal{T}}{\operatorname{tg}\varphi_1}$$

Évaluons actuellement l'autre valeur extrême de $-\mathcal{N}$ et celle de $\mathcal{T}$, savoir les valeurs qui correspondent à $\varepsilon=\frac{\omega-\tau}{2}$ pour $\omega>0$ et à $\varepsilon=\frac{\omega+\tau}{2}$ pour $\omega<0$. Convenons de prendre, au lieu de la racine ψ, de l'équation (74), qui est comprise entre 0 et $\pm\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}$, celle ψ' qui est comprise entre $\pm\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}$ et $\pm\frac{\pi}{2}-\frac{\omega}{2}$, ou qui est telle, par rapport à la précédente ψ, que

$$(76^{ter})\;\ldots\ldots\;\omega+2\psi'=\pm\pi-(\omega+2\psi),$$

Digitized by Google

en adoptant le signe + ou le signe — suivant que ω est > ou < zéro. Il viendra, au lieu de (74bis),

$$\tau = -\frac{\pi}{2} \pm (\omega + 2\psi'),$$

et par suite, à cause de $\varepsilon = \frac{\omega \mp \tau}{2}$,

$$-2\varepsilon = \mp \frac{\pi}{2} + 2\psi'.$$

Cette valeur de -2ε ne diffère de la précédente (74ter) qu'en ce que ψ' y remplace ψ. Donc, à part le changement de ψ en ψ', les formules (72) conduiront aux mêmes relations (75), (76), (76bis) que dans le cas précédent.

En résumé, *les valeurs extrêmes des deux composantes* $-\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}$ *de la poussée exercée sur un élément plan fixe faisant l'angle* ε_1 *avec la verticale, c'est-à-dire celles qui correspondent aux deux modes d'équilibre-limite que comporte un massif indéfini incliné de* ω *sur l'horizon, sont données par les formules*

$$(77) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin(\omega + 2\psi) = \dfrac{\sin\omega}{\sin\varphi}, \qquad \operatorname{tg}(\varphi_1 + \varepsilon_1 + \psi) = \dfrac{\operatorname{tg}(\varepsilon_1 + \psi)}{\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}\right)}, \\ \mathfrak{T} = \dfrac{\sin\varphi\cos\psi\sin 2(\varepsilon_1 + \psi)}{2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}\right)\cos(\omega + \psi)}\rho g l, \qquad -\mathfrak{N} = \dfrac{\mathfrak{T}}{\operatorname{tg}\varphi_1}; \end{array} \right.$$

l'angle auxiliaire ψ, *qui se calculera par la première équation* (77), *devra être choisi de manière que la somme* $\omega + 2\psi$ *soit, en valeur absolue, inférieure à* $\frac{\pi}{2}$ *s'il s'agit du mode d'équilibre qui donne à la composante normale* $-\mathfrak{N}$ *de la pression sa valeur la plus petite, et comprise au contraire entre* $\frac{\pi}{2}$ *et* π, *ou supplémentaire de la précédente, s'il s'agit du mode d'équilibre qui donne à* $-\mathfrak{N}$ *sa valeur la plus grande; quant à l'inclinaison* φ_1 *de la pression sur le prolongement de la normale à l'élément plan, comme elle ne peut varier tout au plus qu'entre* $-\frac{\pi}{2}$ *et* $\frac{\pi}{2}$, *la seconde équation* (77), *en faisant connaître* $\operatorname{tg}(\varphi_1 + \varepsilon_1 + \psi)$, *la détermine complétement.*

L'angle ψ a une signification géométrique importante. On a

$$(77^{bis}) \quad \ldots\ldots \quad -2\varepsilon = \mp\frac{\pi}{2} + 2\psi, \quad \text{ou} \quad -\varepsilon = \mp\frac{\pi}{4} + \psi,$$

Digitized by Google

et par suite, d'après (59) [p. 44], ε' $\left(\text{ou } \varepsilon \mp \frac{\pi}{4}\right) = -\psi$. Or ε' désigne l'angle fait avec la verticale, du côté de OA (fig. 1, p. 38), par une des deux dilatations principales ou des deux pressions principales produites en chaque point : ψ représente donc le même angle, mais estimé positivement dans le sens opposé, c'est-à-dire du côté de Oy.

C'est du reste ce qu'on reconnaît en posant successivement, dans les formules (75), $\varepsilon_1 = -\psi$, $\varepsilon_1 = -\psi + \frac{\pi}{2}$. Il vient dans ces deux cas $\mathfrak{T} = 0$, et, si $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ désignent les deux valeurs de $\mathfrak{N}$,

$$-\mathfrak{N}_1 = \frac{\sin(\omega + 2\psi) - \sin\omega}{\sin 2(\omega + \psi)}\rho g l, \quad -\mathfrak{N}_2 = \frac{\sin(\omega + 2\psi) + \sin\omega}{\sin 2(\omega + \psi)}\rho g l.$$

$\sin(\omega + 2\psi)$ et $\sin\omega$ ayant toujours même signe d'après (74), $-\mathfrak{N}_1$ est la plus petite des pressions principales, $-\mathfrak{N}_2$ la plus grande. Par conséquent, *la direction qui fait avec la verticale l'angle $-\psi$ coïncide avec le profil de l'élément plan sur lequel s'exerce la plus petite pression principale.*

Les formules ci-dessus de $-\mathfrak{N}_1$, $-\mathfrak{N}_2$ se simplifient lorsqu'on y remplace $\sin(\omega + 2\psi) - \sin\omega$ par $2\cos(\omega + \psi)\sin\psi$, $\sin(\omega + 2\psi) + \sin\omega$ par $2\sin(\omega + \psi)\cos\psi$, $\sin 2(\omega + \psi)$ par $2\sin(\omega + \psi)\cos(\omega + \psi)$; elles deviennent

$$(77^{\text{ter}}) \quad \ldots \quad -\mathfrak{N}_1 = \frac{\sin\psi}{\sin(\omega + \psi)}\rho g l, \quad -\mathfrak{N}_2 = \frac{\cos\psi}{\cos(\omega + \psi)}\rho g l.$$

34. Le mode d'équilibre-limite pour lequel la composante $-\mathfrak{N}$ de la pression acquiert sa valeur la plus petite possible est précisément celui qu'a étudié M. Maurice Levy dans son Mémoire *sur une théorie rationnelle de l'équilibre des terres fraîchement remuées et ses applications au calcul de la stabilité des murs de soutènement* (*). Les formules (77) ne diffèrent pas de celles qu'il a données au n° 15 de ce Mémoire. *Pression que supporte un élément plan vertical.*

M. Macquorn-Rankine avait déjà, dès 1856, considéré les deux modes

(*) Ce travail, présenté une première fois à l'Académie des sciences de Paris le 3 juin 1867 et reproduit le 21 juin 1869, se trouve au *Journal de Mathématiques de M. Liouville* (t. XVIII, 1873).



d'équilibre-limite que peut présenter un massif limité par un talus plan et près de s'ébouler dans toute son étendue : il avait fait ressortir les lois qui régissent la poussée exercée sur les éléments plans verticaux, c'est-à-dire sur ceux pour lesquels $\varepsilon_1 = 0$ (*).

Ces lois sont très-simples, même quand l'équilibre n'est pas limite. En effet, posons $\varepsilon_1 = 0$ dans les formules générales (72); nous aurons

$$(78) \quad \ldots\ldots \quad \mathfrak{T} = \frac{\cos 2\varepsilon \sin \omega}{\cos 2(\omega - \varepsilon)} \rho g l, \quad -\mathfrak{N} = \frac{\cos 2\varepsilon \cos \omega}{\cos 2(\omega - \varepsilon)} \rho g l,$$

ce qui revient évidemment à prendre, pour valeurs respectives de la poussée résultante $\mathfrak{R}$ et de son inclinaison φ_1 sur le prolongement de la normale à l'élément plan vertical considéré,

$$(79) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathfrak{R} = \frac{\cos 2\varepsilon}{\cos 2(\omega - \varepsilon)} \rho g l, \quad \varphi_1 = \omega.$$

La seconde relation (79) signifie que, *dans le massif indéfini, tout élément plan vertical éprouve une poussée parallèle au talus supérieur*. La première, spécifiée pour les modes d'équilibre-limite, c'est-à-dire pour les valeurs de -2ε égales à $\mp \frac{\pi}{2} + 2\psi$, donne

$$(79^{bis}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathfrak{R} = \frac{\sin 2\psi}{\sin 2(\omega + \psi)} \rho g l.$$

Or on peut remplacer

$$\begin{array}{llll} \sin 2\psi, & \text{ou} \ \sin(\omega + 2\psi - \omega), & \text{par} \ \sin(\omega + 2\psi)\cos\omega - \cos(\omega + 2\psi)\sin\omega, \\ \sin 2(\omega + \psi), & \text{ou} \ \sin(\omega + 2\psi + \omega), & \text{par} \ \sin(\omega + 2\psi)\cos\omega + \cos(\omega + 2\psi)\sin\omega, \end{array}$$

et observer ensuite que, d'après (74),

$$\sin(\omega + 2\psi) = \frac{\sin\omega}{\sin\varphi}, \quad \cos(\omega + 2\psi) = \frac{\pm\sqrt{\sin^2\varphi - \sin^2\omega}}{\sin\varphi} = \frac{\pm\sqrt{\cos^2\omega - \cos^2\varphi}}{\sin\varphi},$$

(*) Voir aux *Annales des ponts et chaussées* (novembre 1872, p. 242) une note dans laquelle M. Flamant, ingénieur des ponts et chaussées, a donné une exposition géométrique fort simple de la théorie de M. Rankine. M. Considère a également inséré en juin 1870 (pp. 545 à 594), dans ces *Annales*, un Mémoire contenant, outre les mêmes résultats auxquels il était arrivé de son côté, plusieurs considérations judicieuses et intéressantes.


Digitized by Google

les signes supérieurs correspondant à la valeur absolue de $\omega + 2\psi$ moindre que $\frac{\pi}{2}$, ou au mode d'équilibre pour lequel les poussées normales sont les plus petites possibles, et les signes inférieurs correspondant à l'autre mode. Il vient définitivement

$$(80) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathcal{R} = \frac{\cos\omega \mp \sqrt{\cos^2\omega - \cos^2\varphi}}{\cos\omega \pm \sqrt{\cos^2\omega - \cos^2\varphi}}\,\rho g l.$$

Les signes supérieurs donnent la valeur la plus faible de la pression exercée sur l'élément plan vertical, celle qui se produit quand le massif est près de s'ébouler de haut en bas et que le frottement des terres agit le plus possible pour les retenir; les signes inférieurs donnent au contraire la valeur la plus grande de la poussée, celle qui s'observe, ainsi que l'ont remarqué MM. Considère et Flamant, quand le même massif, comprimé horizontalement, est supposé sur le point de s'ébouler en remontant (ou plutôt en refluant au-dessus de sa surface libre), et que par suite le frottement équivaut alors à un accroissement de poids du massif : c'est ce genre de poussée que Poncelet a désigné sous le nom de *butée des terres*.

On voit que *les deux modes d'équilibre-limite correspondent aux deux sortes d'éboulement, par détente et par écrasement ou compression, que peut présenter une masse pulvérulente à face supérieure plane, quand elle s'ébranle à la fois dans toute son étendue.*

Calcul de la poussée totale éprouvée par un mur à face postérieure plane.

35. Calculons enfin la pression totale que supporte, par unité de largeur horizontale, une section plane menée dans le massif, suivant l'axe des z, jusqu'à une distance quelconque L de cet axe, et ayant sur la verticale l'inclinaison également quelconque ε_1. Cette poussée serait évidemment celle qu'éprouverait la face postérieure d'un mur, contigu au massif suivant la section considérée, et supposé capable de produire sur la masse pulvérulente située à son arrière le même effet que produit, dans le massif indéfini, la matière située en avant de la section considérée.

Divisons par des horizontales la section plane ou la face postérieure du mur de soutènement en bandes infiniment étroites. L'une quelconque de ces bandes, située à une certaine distance L de l'axe des z, c'est-à-dire du bord


Digitized by Google

supérieur de la section, aura la hauteur dL et sa base ou largeur égale par hypothèse à l'unité : elle éprouvera une poussée totale $\mathcal{R}dL$, composée de la force normale $-\mathcal{N}dL$, et de la force tangentielle $\mathcal{T}dL$ dirigée vers en bas suivant une perpendiculaire menée dans la section à son bord supérieur ; $-\mathcal{N}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{R}$ auront d'ailleurs les valeurs (72), (72bis). Les poussées élémentaires $\mathcal{R}dL$, exercées sur toutes ces bandes, feront avec la normale à la section, menée vers le dehors du massif, l'angle constant φ_1 que détermine la formule (72ter), et elles seront parallèles; elles auront donc une résultante ou *poussée totale*, P, égale à leur somme, et dont le produit par la distance L_1 de son point d'application au bord supérieur de la section vaudra, d'après le théorème des moments, la somme des produits respectifs des poussées élémentaires $\mathcal{R}dL$ par les distances pareilles L de leurs points d'application. C'est ce qu'expriment les équations

$$(81) \quad \ldots\ldots\ldots \quad P = \int_0^L \mathcal{R}dL, \quad L_1 = \frac{1}{P}\int_0^L L\mathcal{R}dL.$$

Il ne reste plus qu'à y effectuer les intégrations indiquées, après avoir substitué à $\mathcal{R}$ son expression (72bis) et avoir mis dans celle-ci, au lieu de la distance normale l de chaque point de la section au talus supérieur, sa valeur en fonction de la distance oblique L du point considéré au même talus. Cette distance oblique L, comptée le long de la section, est inclinée de ε_1 sur la verticale, tandis que la perpendiculaire l au talus supérieur l'est de ω : l est donc la projection de L sous l'angle $\omega - \varepsilon_1$ et a pour valeur

$$(81^{bis}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad l = L\cos(\omega - \varepsilon_1).$$

Les formules (81) deviendront finalement, en y joignant (72ter),

$$(82) \quad \left\{ \begin{aligned} & L_1 = \frac{2}{3}L, \quad P = K\frac{\rho g L^2}{2}, \quad \text{où} \quad K = \frac{\mathcal{R}\cos(\omega - \varepsilon_1)}{\rho g l} = \frac{\sin\omega\cos(\omega-\varepsilon_1)\cos 2(\varepsilon_1 - \varepsilon)}{\cos 2(\omega - \varepsilon)\sin\varphi_1}, \\ & \operatorname{tg}\left(\varphi_1 + \varepsilon_1 - \varepsilon \pm \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\varepsilon_1 - \varepsilon \pm \frac{\pi}{4}\right)\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \omega + 2\varepsilon \pm \omega\right)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \omega + 2\varepsilon \mp \omega\right)}. \end{aligned} \right.$$

Digitized by Google

Un massif pulvérulent homogène en équilibre d'élasticité, terminé supérieurement par un talus plan dont ω désigne l'inclinaison sur l'horizon, exerce donc, contre un mur qui a sa face postérieure inclinée (en fruit intérieur) d'un angle ε_1 sur la verticale, une poussée appliquée au tiers de la hauteur de la face postérieure du mur, inclinée sous la normale à cette face (normale menée vers l'intérieur du mur) de l'angle φ_1 que donne la quatrième équation (82), *et égale au demi-produit du poids de l'unité de volume apparent du massif par le carré de la hauteur oblique* L *de la face considérée et par un coefficient* K *dont la valeur résulte de la troisième formule* (82). *Toutefois, ces lois ne sont démontrées que pour les modes d'équilibre dans lesquels l'état de la matière est le même sur toute l'étendue d'un plan quelconque parallèle au talus supérieur et qui ne dépendent par suite que du seul paramètre ε.*

On peut avoir à considérer les deux composantes

$$\text{normale}\quad P' = \int_0^L (-\mathcal{N})\,dL \quad \text{et tangentielle}\quad P'' = \int_0^L \mathcal{T}\,dL,$$

de la poussée totale P. Ces deux composantes auront évidemment pour expressions

$$P' = K'\frac{\rho g L^2}{2},\quad P'' = K''\frac{\rho g L^2}{2},$$

où les coefficients K′, K″ désignent les rapports $\frac{-\mathcal{N}\cos(\omega-\varepsilon_1)}{\rho g l}$, $\frac{\mathcal{T}\cos(\omega-\varepsilon_1)}{\rho g l}$, c'est-à-dire, d'après (72), les nombres

$$(82^{bis})\quad \cdot\ \cdot\quad \begin{cases} K' = \dfrac{\cos(\omega-\varepsilon_1)}{\cos 2(\omega-\varepsilon)}\left[\cos(\omega-2\varepsilon) + \sin\omega\sin 2(\varepsilon_1-\varepsilon)\right], \\ K'' = \dfrac{\cos(\omega-\varepsilon_1)}{\cos 2(\omega-\varepsilon)}\sin\omega\cos 2(\varepsilon_1-\varepsilon) = K'\operatorname{tg}(\omega-\varepsilon_1) + \sin\varepsilon_1 : \end{cases}$$

la deuxième expression de K″, savoir $K'\operatorname{tg}(\omega-\varepsilon_1)+\sin\varepsilon_1$, se déduit immédiatement de la relation (72^{quater}).

Valeurs de la poussée quand le mur, rugueux ou poli, est fixe, et que l'état naturel est supposé avoir existé d'abord.

36. La troisième et la quatrième des formules (82) se simplifient lorsqu'on admet, comme spéciales aux parois, les relations (37), c'est-à-dire


Digitized by Google

quand la couche pulvérulente contiguë au mur est supposée maintenue, soit dans ses positions d'état naturel s'il est rugueux, soit tout au moins dans son plan primitif s'il est poli. Il faut alors, comme on a vu aux nos 22 et 23, poser $\varepsilon = \varepsilon_1$ dans le premier cas, $\varepsilon = \varepsilon_1 - \frac{\pi}{4}$ dans le second. Et d'abord, la valeur de φ_1 se tirera aisément des deux expressions (72) de $\mathfrak{T}$ et de $-\mathfrak{N}$, dont le rapport égale $\operatorname{tg}\varphi_1$. Il viendra

$$(82^{ter}) \quad \ldots\ldots \quad \operatorname{tg}\varphi_1 = \begin{cases} \dfrac{\sin\omega}{\cos(\omega - 2\varepsilon_1)} & \text{(mur rugueux)}, \\ \text{zéro} & \text{(mur poli)}. \end{cases}$$

La troisième (82), d'après les valeurs (72bis) de $\mathfrak{R}$, dans le cas du mur rugueux, et en observant que, dans celui du mur poli, $\mathfrak{R}$ se réduit à

$$-\mathfrak{N} = \frac{-\sin(\omega - 2\varepsilon_1) + \sin\omega}{-\sin 2(\omega - \varepsilon_1)}\rho g l = \frac{2\cos(\omega - \varepsilon_1)\sin\varepsilon_1}{2\cos(\omega - \varepsilon_1)\sin(\varepsilon_1 - \omega)}\rho g l = \frac{\sin\varepsilon_1}{\sin(\varepsilon_1 - \omega)}\rho g l,$$

donnera à son tour

$$(82^{quater}) \quad \ldots\ldots \quad K = \begin{cases} \dfrac{\cos(\omega - \varepsilon_1)\sin\omega}{\cos 2(\omega - \varepsilon_1)\sin\varphi_1} & \text{(mur rugueux)}, \\ \dfrac{\sin\varepsilon_1}{\operatorname{tg}(\varepsilon_1 - \omega)} & \text{(mur poli)}. \end{cases}$$

Quand le mur rugueux a sa face postérieure verticale, ou que $\varepsilon_1 = 0$ et par suite $\varphi_1 = \omega$, il vient simplement

$$K = \frac{\cos\omega}{\cos 2\omega}.$$

Observons enfin que, d'après la formule (82ter), comparée à la condition (69), la valeur absolue de $\operatorname{tg}\varphi_1$ sera toujours inférieure ou, au plus, égale à $\sin\varphi$; ce qui signifie que la poussée supportée par un mur de soutènement immobilisant la couche pulvérulente contiguë dans ses positions d'état naturel, fait avec la normale à cette couche un angle au plus égal à celui dont la tangente vaut le sinus de l'angle φ du frottement intérieur. Il suffirait donc, pour qu'un tel mur pût être supposé infiniment rugueux, ou capable d'immobi-

Digitized by Google

liser la couche pulvérulente contiguë dans ses positions primitives, que l'angle de son frottement contre le massif fût égal ou supérieur à celui dont la tangente vaut le sinus de l'angle φ de frottement intérieur (soit à $35°16'$ pour $\varphi = 45°$). On laisse toujours dans la pratique, aux murs de soutènement, assez de rugosités pour que l'angle du frottement extérieur soit même plus grand que φ.

---

§ VIII.

RÉSOLUTION DES PROBLÈMES D'ÉQUILIBRE LES PLUS IMPORTANTS DANS LES APPLICATIONS, AU MOYEN D'UNE CONDITION DE STABILITÉ QUI TIENT LIEU DES RELATIONS SPÉCIALES AUX PAROIS.

Cas où l'équilibre le plus stable se réalise.

37. Les formules établies au numéro précédent, reposant sur les conditions spéciales (37) [p. 36], ne conviennent que pour le cas d'un massif, primitivement libre de toute pression et sans pesanteur, qui a pris en devenant pesant un nouvel équilibre, sans que la couche contiguë à la face postérieure du mur qui le soutient se soit déplacée si le mur est rugueux, ou soit sortie de son plan primitif s'il est poli. Or on a vu à la fin du § III que l'immobilité des particules adjacentes à une paroi rugueuse, par exemple, conduit bien à regarder leurs déplacements u, v comme des fonctions de x, y, déterminées dans chaque cas, mais non à les faire égaux à zéro, et que par suite les conditions simples $u = 0$, $v = 0$ ne peuvent guère être vérifiées dans la pratique.

En réalité, on forme un massif pulvérulent en déposant successivement contre un mur rugueux préalablement construit des couches de terre ou de sable. Les particules voisines du mur se trouvent immobilisées à peu près,



tant qu'elles ne sont pas trop comprimées, dans des positions d'état naturel; mais la pression croissante et bientôt considérable qu'elles ont ensuite à supporter y cause un grand nombre de glissements finis, ou d'éboulements partiels, à la suite desquels se réalise un tout autre mode d'équilibre. Ce mode doit être le plus favorable possible à la stabilité intérieure du massif, c'est-à-dire celui pour lequel la dilatation maxima ∂_1 acquiert aux divers points ses plus petites valeurs compatibles avec le degré de résistance que le mur peut opposer : car le mode d'équilibre ainsi défini, s'il n'était pas déjà complétement réalisé un instant après que l'on a déposé les dernières couches de terre ou de sable, ne tarderait pas à s'établir par l'effet des petits ébranlements, dus à mille causes diverses, que le massif éprouve presque à tout instant, et qui permettent aux grains sablonneux de se grouper de la manière en quelque sorte la moins forcée (*).

Abstraction faite d'une zone contiguë au mur de soutènement et dans l'étendue de laquelle l'influence immédiate de ce dernier produit peut-être des perturbations locales, tous les modes d'équilibre réalisables du massif sont représentés par les formules (57) à (60) [p. 43 et 44], dans lesquelles ε désigne un paramètre variable de $\frac{\omega-\tau}{2}$ à $\frac{\omega+\tau}{2}$ (form. 70bis) (**). Or, d'après (60), ∂_1 est le plus petit possible quand $\varepsilon=\frac{\omega}{2}$.

Telle est la valeur du paramètre ε qui, en réduisant la dilatation maxima ∂_1 à son minimum $\frac{\pm\sin\omega}{2m}$, correspond au mode d'équilibre le plus stable intérieurement, ou le plus voisin possible de l'état naturel pour lequel on aurait

(*) Les mouvements vibratoires produisent à la longue un effet analogue sur les corps solides; mais, vu la tendance à la cristallisation qui existe alors, la structure plus naturelle qui s'y réalise graduellement n'est la plus stable que pour chaque molécule intégrante en particulier, nullement pour l'ensemble de ces molécules, qui tendent, au contraire, à s'isoler les unes des autres.

(**) Ces diverses relations, en y appelant x, y les coordonnées actuelles des molécules, l leur distance actuelle à la surface libre, ε une fonction de l, résultent des formules (28), (35), (30), (10), (66) : elles subsistent quand, ε ou $\frac{\rho g l}{p}$ n'étant pas constants, la relation (28bis) ne se vérifie pas; on verra au n° 42 que cela pourrait arriver. Alors il n'y a plus de coordonnées d'état naturel $x-u$, $y-v$ variables avec continuité d'une particule à ses voisines; car la formule du haut de la page 31, équivalente à (28bis) ou (28ter), exprime, comme on le reconnait aisément, qu'il existe deux fonctions continues u, v de x, y telles, que $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$, $\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}$ égalent trois fonctions données ∂_x, ∂_y, g_{xy}.

Digitized by Google

partout $\partial_1 = 0$, *et par conséquent au mode d'équilibre qui se produira si le mur de soutènement est assez ferme pour subir, sans se renverser, la poussée correspondante.*

Supposons donc $\varepsilon = \frac{\omega}{2}$, et, appelant ε_1 l'inclinaison de la face postérieure du mur sur la verticale, calculons d'abord la poussée. Il suffit, pour l'obtenir, de faire $\varepsilon = \frac{\omega}{2}$ dans les formules (82); ce qui donne

$$(83)\qquad \operatorname{tg}\left(\varphi_1 + \varepsilon_1 + \frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\varepsilon_1 + \frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}\right)},\quad K = \frac{\operatorname{tg}\omega \cos(\omega - \varepsilon_1)\cos(\omega - 2\varepsilon_1)}{\sin\varphi_1}.$$

La poussée sera donc régie par les lois énoncées après les formules (82), à cela près que l'angle φ_1 et le coefficient K auront les valeurs complétement déterminées résultant de (83).

L'expression de K devient extrêmement simple quand la face postérieure du mur est verticale, ou qu'on a $\varepsilon_1 = 0$ et par suite $\varphi_1 = \omega$: elle se réduit à

$$(83^{bis})\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\quad K = \cos\omega.$$

Cherchons encore à nous rendre compte des déplacements *élastiques* que les divers points du massif éprouvent par rapport au mur supposé immobile.

D'après des lois énoncées page 45, le tassement élastique, à part un mouvement d'ensemble de toute la masse pulvérulente, se fera par déplacements parallèles à un plan fixe OM incliné de $\frac{\omega}{2}$ sur la verticale, et égaux au produit de la distance D de chaque particule à ce plan par le facteur constant $\frac{\sin\omega}{m}$. Mais, après ce mouvement fictif, la droite matérielle émanée de l'origine et primitivement inclinée de ε_1 sur la verticale, c'est-à-dire couchée le long du mur ou faisant d'abord l'angle $\varepsilon_1 - \frac{\omega}{2}$ avec la direction des déplacements, ne fait plus avec celle-ci qu'un angle un peu moins grand $\varepsilon_1 - \frac{\omega}{2} - \zeta_3$. Le petit angle ζ_3, dont elle a tourné autour de l'origine, est tel, que l'accroissement $D \cot g\left(\varepsilon_1 - \frac{\omega}{2} - \zeta_3\right) - D\cot g\left(\varepsilon_1 - \frac{\omega}{2}\right)$, ou sensiblement $\frac{D\zeta_3}{\sin^2\left(\varepsilon_1 - \frac{\omega}{2}\right)}$, de la distance qui sépare l'origine O du pied de la perpendiculaire D abaissée

de chacun des points de la droite matérielle sur le plan fixe qui vient d'être défini, vaut précisément le déplacement $D\frac{\sin\omega}{m}$. On a donc, comme valeur de la rotation ζ_2 qu'il faudra imprimer à tout le massif dans le sens de Oy vers Ox, après ce tassement fictif, pour ramener contre le mur la couche qui lui reste adjacente et obtenir ainsi la situation définitive de toute la masse,

$$(84) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \zeta_2 = \frac{\sin\omega}{m}\sin^2\left(\varepsilon_1 - \frac{\omega}{2}\right).$$

L'angle $\zeta - \zeta_2$, qui exprime la diminution, due au tassement *élastique*, de l'inclinaison $\omega + \frac{\pi}{2} - \varepsilon_1$ du talus sur la face postérieure du mur, sera l'excès, sur ζ_2, de la valeur (62) de ζ spécifiée pour $\varepsilon = \frac{\omega}{2}$. Cet angle vaudra donc

$$\begin{aligned} &\frac{\sin\omega}{m}\left[\cos^2\frac{\omega}{2} - \sin^2\left(\varepsilon_1 - \frac{\omega}{2}\right)\right] \\ &= \frac{\sin\omega}{m}\left[\cos^2\frac{\omega}{2} - \cos^2\frac{\omega}{2}\sin^2\varepsilon_1 - \sin^2\frac{\omega}{2}\cos^2\varepsilon_1 + 2\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}\sin\varepsilon_1\cos\varepsilon_1\right] \\ &= \frac{\sin\omega\cos\varepsilon_1\cos(\omega - \varepsilon_1)}{m}, \end{aligned}$$

et l'on aura en définitive, pour valeur de la réduction éprouvée par l'angle du talus supérieur et de la face postérieure du mur de soutènement,

$$(84^{bis}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \zeta - \zeta_2 = \frac{\sin\omega\cos\varepsilon_1\cos(\omega - \varepsilon_1)}{m}.$$

Cas où l'équilibre produit ne comporte qu'un certain degré de stabilité.

38. Passons actuellement au cas où le mur de soutènement n'est pas assez solide pour que le massif puisse acquérir le maximum de stabilité, et supposons ε constant, afin qu'une condition unique pour tout le mur détermine ce paramètre sans qu'on ait à en chercher une spéciale à chaque valeur de l.

J'admettrai que le mur se comporte comme un corps rigide, plus ou moins mobile autour d'un axe *fixe* parallèle à celui des z, de manière que son degré de fermeté ait pour mesure la valeur la plus grande M que peut atteindre le moment de la poussée autour de cet axe sans produire de renversement. Soit b la distance du même axe à la face postérieure du mur,

Digitized by Google

a la distance, au même axe, de la perpendiculaire élevée à cette face postérieure à partir du tiers de sa hauteur L, distance comptée positivement au-dessus de l'axe de rotation, négativement en dessous. Les composantes, normale P' et tangentielle P'', de la poussée totale P, auront pour moments respectifs aP', $-bP''$, et le moment total de la force qui tend à produire le renversement du mur vaudra $aP'-bP''$, c'est-à-dire, d'après ce que nous avons vu à la fin du nº 35 (p. 79),

$$(85) \quad \ldots \quad \frac{\rho g L^2}{2}(aK'-bK'')=\frac{\rho g L^2}{2}\{[a-b\,\mathrm{tg}\,(\omega-\varepsilon_1)]\,K'-b\sin\varepsilon_1\}.$$

Dans la pratique, les données $a, b, \omega, \varepsilon_1$ auront toujours des valeurs qui rendront ce moment positif, et croissant avec K' quand on fera varier le paramètre ε caractéristique du mode d'équilibre. Comme K', abstraction faite du facteur $\cos(\omega-\varepsilon_1)$ indépendant de ε, représente le rapport $\frac{-\mathfrak{N}}{\rho g l}$, dont la dérivée par rapport à ε (form. 73) est négative ou positive suivant que ω est $>$ ou $<$ zéro, le moment (85) de la poussée décroîtra sans cesse lorsque ε ira de $\frac{\omega}{2}$ à $\frac{\omega\pm\tau}{2}$, en adoptant dans cette dernière expression le signe supérieur ou le signe inférieur suivant que l'inclinaison ω sera positive ou négative. Mais $\cos(\omega-2\varepsilon)$ décroîtra en même temps de 1 à $\cos\tau$, et ∂_1, d'après la première formule (60), grandira de $\frac{\pm\sin\omega}{2m}$ à $\frac{\pm\sin\omega}{2m\cos\tau}$. Donc la plus petite valeur admissible de ∂_1 est celle qui correspond à la valeur de ε, comprise entre $\frac{\omega}{2}$ et $\frac{\omega\pm\tau}{2}$, pour laquelle l'expression (85) égale le moment donné M mesurant le degré de fermeté du mur.

Cette valeur de ε définit le mode d'équilibre le plus stable que comportent les circonstances, ou par conséquent celui qui se produira définitivement. On l'obtiendra en égalant à M la seconde expression (85), ce qui donnera la valeur effective de K' et par suite, d'après la seconde équation (82bis), la valeur de K'' et celle du rapport $\frac{\cos 2(\varepsilon_1-\varepsilon)}{\cos 2(\omega-\varepsilon)}$. Soit χ ce dernier. On aura donc

$$\cos 2(\varepsilon_1-\varepsilon)=\chi\cos 2(\omega-\varepsilon),$$

ou bien

$$\cos 2\varepsilon_1\cos 2\varepsilon+\sin 2\varepsilon_1\sin 2\varepsilon=\chi[\cos 2\omega\cos 2\varepsilon+\sin 2\omega\sin 2\varepsilon]:$$


Digitized by Google

on tire de là

$$(85^{ter}) \ldots\ldots\ldots\ldots \operatorname{tg} 2\varepsilon = -\frac{\cos 2\varepsilon_1 - \chi \cos 2\omega}{\sin 2\varepsilon_1 - \chi \sin 2\omega},$$

formule qui fera connaître, sans aucune indétermination, l'angle 2ε compris entre ω et $\omega \pm \tau$, et toujours inférieur à $\frac{\pi}{2}$ en valeur absolue.

Une fois le paramètre ε déterminé, le mode d'équilibre le sera lui-même et les formules (82) permettront de calculer la poussée. Quant au moment de celle-ci par rapport à l'axe de rotation du mur, il sera égal à M.

L'équilibre deviendrait impossible, et le mur serait renversé, si la constante donnée M, qui mesure son pouvoir de résistance, était inférieure à la valeur que prend l'expression (85) quand on y met pour K' sa valeur la plus petite possible, c'est-à-dire quand ε devient égal à $\frac{\omega \pm \tau}{2}$ et que le massif passe à l'état ébouleux. A ce moment, K', ou $\frac{-\mathfrak{N} \cos(\omega - \varepsilon_1)}{\rho g l}$, ou encore $\frac{\mathfrak{T} \cos(\omega - \varepsilon_1)}{\rho g l \operatorname{tg} \varphi_1}$, reçoit la valeur

$$\frac{\sin \varphi \cos(\omega - \varepsilon_1) \cos \psi \sin 2(\varepsilon_1 + \psi)}{2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \cos(\omega + \psi) \operatorname{tg} \varphi_1},$$

qui résulte des formules (77) lorsqu'on y prend pour ψ la plus petite (en valeur absolue) des racines de la première équation (77). Il est donc nécessaire, pour que le mur ne se renverse pas, que son pouvoir de résistance M satisfasse à l'inégalité

$$(86) \quad M > \frac{\rho g L^2}{2} \left\{ -b \sin \varepsilon_1 + [a - b \operatorname{tg}(\omega - \varepsilon_1)] \frac{\sin \varphi \cos(\omega - \varepsilon_1) \cos \psi \sin 2(\varepsilon_1 + \psi)}{2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \cos(\omega + \psi) \operatorname{tg} \varphi_1} \right\}.$$

Toutes les valeurs de M supérieures au second membre de cette inégalité seront compatibles avec un mode d'équilibre plus ou moins stable du massif. Le maximum de stabilité intérieure sera même atteint dès que M aura une valeur égale ou supérieure à celle que reçoit la seconde expression (85) pour $\varepsilon = \frac{\omega}{2}$.

En résumé, *quand un mur de soutènement n'est pas assez ferme pour permettre l'établissement du mode d'équilibre, doué du maximum de stabi-*

Digitized by Google

lité, qui correspond à $\varepsilon = \frac{\omega}{2}$, l'équilibre définitif qui se produit réellement est celui pour lequel tout le pouvoir de résistance du mur se trouve utilisé (*).

Cas plus général, dans lequel le moment de la poussée serait directement connu.

39. Le cas où l'on donne le degré de stabilité d'un mur de soutènement est donc compris dans un autre plus général, qui est celui où l'on connaît le moment de la poussée par rapport à l'axe de rotation du mur ; c'est ce qui arrive quand le mur, supposé sans poids pour plus de simplicité, est maintenu en équilibre au moyen d'une force constante directement évaluable. Alors la condition d'équilibre s'obtient en égalant le moment connu M de cette force à celui (85) de la poussée, ce qui donne, comme précédemment, les coefficients K′, K″, et par suite la valeur du paramètre ε caractéristique du mode d'équilibre. Seulement, les expressions (85) n'étant plus astreintes

(*) Si le massif terreux avait acquis à la longue de la cohésion, et si l'on admettait qu'en se solidifiant il se fût fixé dans le mode d'équilibre le plus voisin possible de l'état naturel, c'est-à-dire dans celui pour lequel le potentiel d'élasticité Φ, égal à

$$\frac{1}{2}(\lambda+\mu)(\partial_1+\partial_2)^2+\frac{1}{2}\mu(\partial_1-\partial_2)^2,$$

ou au quotient par 2μ de

$$(\mu\partial_1-\mu\partial_2)^2+\frac{1}{\sin\varphi}(\mu\partial_1+\mu\partial_2)^2,$$

reçoit sa plus petite valeur, la formule (60bis) [p. 45] donnerait, en y substituant finalement la valeur de $\cos(\omega-2\varepsilon)$ qui résulte de (56bis),

$$2\mu\Phi = p^2\left[\sin\varphi+\frac{\sin^2\omega}{\cos^2(\omega-2\varepsilon)}\right]=(1+\sin\varphi)\left(p-\frac{\rho g l\cos\omega}{1+\sin\varphi}\right)^2+\rho^2g^2l^2\left(1-\frac{\cos^2\omega}{1+\sin\varphi}\right).$$

Le potentiel Φ, minimum pour $p=\frac{\rho g l\cos\omega}{1+\sin\varphi}$, est par conséquent d'autant plus petit que le rapport $\frac{p}{\rho g l}$ est plus voisin de la fraction $\frac{\cos\omega}{\cos^2\varphi}(1-\sin\varphi)$. Celle-ci est d'ailleurs moindre que les valeurs de $\frac{p}{\rho g l}$ qui correspondent aux modes d'équilibre, seuls admissibles dans un massif très-profond, pour lesquels on a (note de la p. 63)

$$\cos^2(\omega-2\varepsilon)>\frac{\sin^2\omega}{\sin^2\varphi};$$

en effet, la plus petite de ces valeurs, calculée au moyen de (56bis) [p. 45] en y faisant

$$\cos^2(\omega-2\varepsilon)=\frac{\sin^2\omega}{\sin^2\varphi},\quad\text{vaut}\quad\frac{\cos\omega}{\cos^2\varphi}\left(1-\sqrt{\frac{\sin^2\varphi-\sin^2\omega}{1-\sin^2\omega}}\right).$$

En conséquence, cette dernière valeur de $\frac{p}{\rho g l}$ est celle qui rend Φ aussi petit que possible quand la profondeur est fort grande. Ainsi, *le mode d'équilibre définitif qui se produira dans un*



à se trouver inférieures ou au plus égales à la valeur qu'elles prennent quand $\varepsilon = \frac{\omega}{2}$, ou quand le mode d'équilibre est le plus stable possible, ε sera compris, non plus entre $\frac{\omega}{2}$ et $\frac{\omega \pm \tau}{2}$, mais entre $\frac{\omega - \tau}{2}$ et $\frac{\omega + \tau}{2}$. Il suffira, pour cela, que le moment donné M de la force chargée de faire équilibre à la poussée se trouve lui-même compris entre les deux valeurs que reçoit le second membre de l'inégalité (86) lorsqu'on y met successivement pour ψ et pour φ_1 les deux couples de valeurs correspondant aux deux modes d'équilibre-limite dont il a été parlé à la page 74.

Admettons, conformément à ce qui arrive toujours dans la pratique, que l'inclinaison ε_1 de la face postérieure du mur sur la verticale soit comprise entre $\frac{\omega}{2} \pm \frac{\pi}{4}$, ou que par suite l'angle $\omega - 2\varepsilon_1$ soit inférieur à $\frac{\pi}{2}$ en valeur absolue, et considérons la dilatation élastique $\partial_{x'}$ éprouvée par les lignes matérielles du massif primitivement normales à la même face. Cette dilatation mesure l'écart relatif qui s'est produit, à partir de l'état naturel, entre la face postérieure du mur et les plans matériels du massif qui lui étaient primitivement parallèles et qui d'ailleurs le sont encore après les

massif cohérent très-profond ne diffère pas, quant à la distribution des pressions, de l'équilibre-limite, par détente, que le même massif pourrait présenter s'il était pulvérulent et d'un angle de frottement φ ayant son sinus égal à $\frac{\mu}{\lambda + \mu}$: les poussées latérales y sont minima.

Un massif peu profond comporte, au contraire, des modes d'équilibre pour lesquels la valeur de Φ est moindre : cette valeur se réduira même à son minimum absolu, si l'on peut poser $\frac{p}{\rho g l} = \frac{\cos \omega}{1 + \sin \varphi}$, sans que le mur soit renversé et sans que la dilatation principale ∂_1, alors positive, atteigne sur la couche la plus profonde une valeur capable de déterminer la rupture.

Un massif assez peu profond peut aussi se disposer de manière qu'il y ait en chaque point un élément plan libre de toute pression, parmi ceux qui sont normaux au plan des déformations. Les relations (29) montrent que cela n'arrive, ou que p_x, p_y ne s'annulent pour une même valeur de β, que si $N_1 N_2 = T^2$, ou, vu les valeurs (49bis) [p. 45] de N_1, N_2, T, si $\frac{\rho g l}{p} = 2 \cos \omega$; d'où il suit, en supposant $\omega > 0$, que la formule (56bis) [p. 45] donne $\omega - 2\varepsilon = -\frac{\pi}{2} + \omega$, $\varepsilon = \frac{\pi}{4}$. Les formules (57) montrent que $-\mathfrak{N}$, $\mathfrak{T}$ s'annulent alors pour $\varepsilon_1 = 0$, ou que *ce sont les éléments plans verticaux qui ne supportent aucune pression. Le mode d'équilibre considéré convient donc au cas d'un massif taillé à pic, ou dont chaque couche verticale se soutient elle-même, sans s'appuyer sur ses voisines.*

Ces résultats et ceux que contient la note de la page 63 subsistent indépendamment de la formule (28ter), c'est-à-dire sans qu'on admette l'existence de coordonnées d'état naturel variables avec continuité d'une particule à ses voisines. Toutefois, quand la profondeur effective du massif est très-grande, $\lambda + \mu$ croissant lentement avec p (et plus que μ), il faut supposer φ variable, en sorte que, si la profondeur est excessive, on aura $\varphi = 0$, pour l très-grand, et par suite $\omega = 0$.

Digitized by Google

déplacements. L'écart dont il s'agit (négatif ou positif) est dû en partie au poids même du massif, en partie à l'excédant (positif ou négatif) de la pression qui maintient ce dernier plus ou moins comprimé par le mur. La première formule (58) [p. 44] donnera

$$(87) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \partial_{x'} = \frac{\sin\omega}{2m}\,\frac{\sin 2(\varepsilon-\varepsilon_1)}{\cos(\omega-2\varepsilon)}.$$

En différentiant celle-ci par rapport à ε, et remplaçant, dans le résultat,

$$\cos(\omega-2\varepsilon)\cos 2(\varepsilon-\varepsilon_1) - \sin(\omega-2\varepsilon)\sin 2(\varepsilon-\varepsilon_1) \quad \text{par} \quad \cos(\omega-2\varepsilon_1),$$

il vient

$$(87^{bis}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{d\partial_{x'}}{d\varepsilon} = \frac{\sin\omega\cos(\omega-2\varepsilon_1)}{m\cos^2(\omega-2\varepsilon)}.$$

On voit que $\partial_{x'}$ varie dans le même sens que ε ou en sens inverse, suivant que ω est $>$ ou $<$ 0 : en d'autres termes, $\partial_{x'}$ croît sans cesse quand ε varie de $\frac{\omega\mp\tau}{2}$ à $\frac{\omega\pm\tau}{2}$.

Cela posé, concevons que le moment M de la poussée ou de la force extérieure qui lui fait équilibre décroisse de sa limite supérieure à sa limite inférieure, de manière à faire varier ε de $\frac{\omega\mp\tau}{2}$ à $\frac{\omega\pm\tau}{2}$: l'expression (87) de $\partial_{x'}$ grandira sans cesse. La formule (87) montre qu'elle s'annulerait pour $\varepsilon=\varepsilon_1$. Donc, *les diverses couches de matière pulvérulente parallèles à la face postérieure du mur se sont d'autant plus rapprochées les unes des autres et de cette face, à partir de l'état naturel, que le moment* M *de la poussée est plus grand : elles ont conservé leurs distances primitives (tout en glissant les unes devant les autres), si le moment de la poussée a une valeur telle, que $\varepsilon=\varepsilon_1$; elles se sont rapprochées si le moment dont il s'agit est plus grand que cette même valeur, écartées au contraire si le moment de la poussée est plus petit.*

Lors d'une immobilité absolue du mur de soutènement, le moment de la poussée reçoit la valeur qui correspond à $\varepsilon=\frac{\omega}{2}$: alors le degré de rapprochement ou d'écartement des couches qui se produit est dû tout entier au poids même du massif ; c'est un état moyen dans lequel le mur ne tend, ni à chasser le massif derrière lui en le soulevant et le faisant reculer, ni à céder

Digitized by Google

sous sa pression en se renversant en avant. Au contraire, les valeurs plus grandes du moment de la poussée correspondent à des états d'équilibre dans lesquels le mur, pressé par une force extérieure contre le massif, commence à le chasser derrière lui en le comprimant, tandis que les valeurs plus petites correspondent à des états où le mur commence à céder sous la poussée du massif, qui se dilate par suite en avant.

Tous ces modes d'équilibre sont stables. En effet, on y suppose égal à une constante donnée le moment de la force extérieure, appliquée au mur, qui fait équilibre à la poussée du massif. Or, si le mur vient à quitter sa position primitive, soit en s'écartant du massif, soit en s'en rapprochant, celui-ci se détendra dans le premier cas, se comprimera dans le second, et le moment de sa poussée contre le mur diminuera ou augmentera, de manière à être surpassé dans le premier cas par le moment de la force chargée de lui faire équilibre, à le surpasser dans le second; par suite, le mur tendra bien à reprendre sa première position. Toutefois, la stabilité de l'équilibre devient incomplète quand le moment de la poussée a précisément sa valeur la plus grande ou la plus petite possible, en sorte qu'il ne puisse pas, suivant les cas, grandir ou diminuer sans que la rupture du massif devienne inévitable. Ce qu'on peut appeler *champ de stabilité,* par exemple l'intervalle τ des deux valeurs limites $\frac{\omega \mp \tau}{2}$ de ε, se réduit même à zéro quand $\omega = \pm\varphi$: alors la poussée ne peut, ni croître, ni décroître, sans que l'état du massif devienne ébouleux, et l'équilibre est instable.

Application à un mur dont la face postérieure est verticale.

40. On voit qu'il n'est nullement nécessaire de donner à un mur de soutènement une épaisseur qui permette au mode d'équilibre le plus stable de s'établir : il suffit à la rigueur, pour que ce mur ne se renverse pas et même résiste à des ébranlements modérés, qu'il puisse supporter une pression un peu supérieure à celle qui correspond au mode d'équilibre le moins stable, pression donnée par les formules (77) [p. 74] dans lesquelles on mettra pour ψ sa valeur la plus petite.

Supposons, par exemple, que la face postérieure du mur soit verticale, circonstance en vertu de laquelle nous avons vu (form. 79) que la poussée du massif, appliquée au tiers de la hauteur du mur, devient parallèle au

Digitized by Google

talus supérieur ou prend sous l'horizon l'inclinaison constante ω. Le coefficient K, qui entre dans l'expression $K\frac{\rho g L^2}{2}$ de cette poussée, représente d'ailleurs le rapport $\frac{\mathfrak{R}\cos(\omega-\varepsilon_1)}{\rho g l}$, actuellement réduit à $\frac{\mathfrak{R}\cos\omega}{\rho g l}$, et vaut, d'après la première (79),

$$(88) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad K=\frac{\cos\omega\cos 2\varepsilon}{\cos 2(\omega-\varepsilon)}.$$

Cette valeur de K, alors égale à $\frac{K'}{\cos\omega}$, se réduit à $\cos\omega$ pour $\varepsilon=\frac{\omega}{2}$ et décroit constamment, comme K', quand ε va de $\frac{\omega\mp\tau}{2}$ à $\frac{\omega\pm\tau}{2}$; à la seconde de ces limites, la formule (79bis) donne

$$(89) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad K=\frac{\cos\omega\sin 2\psi}{\sin 2(\omega+\psi)},$$

ψ désignant la plus petite, en valeur absolue, des racines de la première équation (77).

Cette expression (89) de la moindre valeur de K devient indéterminée quand $\omega=0$; mais elle cesse de l'être en observant que, pour les très-petites valeurs absolues de ω, la première équation (77) peut être remplacée par celle-ci, $\omega+2\psi=\frac{\omega}{\sin\varphi}$ ou $\frac{\psi}{\omega}=\frac{1-\sin\varphi}{2\sin\varphi}$, ce qui donne

$$\frac{\sin 2\psi}{\sin 2(\omega+\psi)}=\frac{\psi}{\omega+\psi}=\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}=\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right).$$

La vraie valeur de K est donc alors

$$(89^{bis}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad K=\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right).$$

Soit $\varphi=45°$. La première équation (77) et la formule (89) permettront de former le tableau suivant :

Pour $\omega=0$,	$\pm 10°$,	$\pm 20°$,	$\pm 30°$,	$\pm 40°$,	$\pm 45°$,
$2\psi=0$,	$\pm 4°13'$,	$\pm 8°56'$,	$\pm 15°$,	$\pm 25°22'$,	$\pm 45°$,
valeur la plus petite de K $=0{,}1716$,	$0{,}1765$,	$0{,}1935$,	$0{,}2320$,	$0{,}3404$,	$\frac{1}{\sqrt{2}}=0{,}7071$;



tandis que les valeurs de K correspondantes au maximum de stabilité de l'état du massif et égales à cos ω seraient, pour les mêmes valeurs de ω,

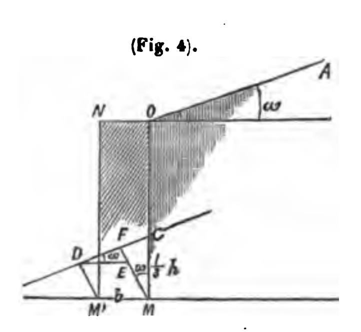
$$K = 1,\quad 0,9848,\quad 0,9397,\quad 0,8660,\quad 0,7660,\quad \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071.$$

L'équilibre du massif sera donc stable pourvu que le mur puisse supporter une poussée appliquée au tiers de la hauteur de sa face postérieure, dirigée parallèlement au talus supérieur et un peu plus grande que K $\frac{\rho g L^2}{2}$, K ayant celle des valeurs ci-dessus, 0,1716, 0,1765, etc., qui correspond à la déclivité donnée ω du talus. La structure du massif acquerrait même toute la stabilité possible si le mur pouvait supporter, au même point d'application et suivant la même direction, une poussée égale ou supérieure à K $\frac{\rho g L^2}{2}$, K ayant les valeurs plus grandes 1, 0,9848, etc., calculées en dernier lieu.

Calcul de l'épaisseur à donner à un tel mur.

41. Ordinairement, un mur de soutènement MONM' (fig. 4) tend à se renverser en tournant autour de la base, projetée en M', de sa face antérieure, et on ne le suppose maintenu en équilibre que par son poids. Appelons, dans ces hypothèses, ρ' sa densité, admettons que ses faces MO, M'N soient verticales, et cherchons quel mode d'équilibre se réalisera si on lui donne une épaisseur b suffisante pour qu'il se soutienne, mais pas assez grande pour que la stabilité intérieure du massif soit maxima.

(Fig. 4).



D'après ce qu'on a vu page 87, il faut exprimer que le moment du poids du mur par rapport à M' est égal à celui de la poussée P. Celle-ci sera appliquée en C, au tiers de la hauteur h du mur, et égale à K $\frac{\rho g h^2}{2}$, K désignant le coefficient donné par la formule (88); enfin, elle sera parallèle au talus supérieur, c'est-à-dire dirigée suivant la droite CD qui fait sous l'horizon l'angle ω (toujours positif dans la pratique). On aura son moment par rapport à l'arête M' en la multipliant par la perpendiculaire M'D, menée de M' sur CD : or

$$M'D = MF - EF = \frac{1}{3} h \cos\omega - b \sin\omega;$$

Digitized by Google

le moment de la poussée est par suite

$$\frac{1}{2}\rho g h^2 K\left(\frac{1}{3}h\cos\omega - b\sin\omega\right).$$

D'autre part, le poids de l'unité de longueur du mur égale $\rho' g b h$ et a pour bras de levier, par rapport à M', $\frac{1}{2}b$. Son moment vaut donc $\frac{1}{2}\rho' g h b^2$, et l'on a

$$\frac{1}{2}\rho g h^2 K\left(\frac{1}{3}h\cos\omega - b\sin\omega\right) = \frac{1}{2}\rho' g h b^2,$$

ou bien, en divisant par $\frac{1}{2}\rho' g h^3$ et transposant,

(90) . . . . $$\left(\frac{b}{h}\right)^2 + \frac{\rho}{\rho'}K\sin\omega.\left(\frac{b}{h}\right) - \frac{\rho}{3\rho'}K\cos\omega = 0.$$

Telle est l'équation d'où l'on tirera la valeur de K pour la substituer dans (88); celle-ci, résolue par rapport à tg 2ε après qu'on y aura remplacé $\cos 2(\omega - \varepsilon)$ par $\cos 2\varepsilon\,[\cos 2\omega + \sin 2\omega \operatorname{tg} 2\varepsilon]$, donnera enfin la valeur cherchée de ε.

Mais on peut aussi résoudre l'équation (90) par rapport à $\frac{b}{h}$, afin de connaître la valeur du rapport $\frac{b}{h}$ de l'épaisseur du mur à sa hauteur qui correspond à une valeur quelconque de ε comprise entre $\frac{\omega}{2}$ et $\frac{\omega \pm \tau}{2}$, c'est-à-dire à un mode plus ou moins stable d'équilibre. Si l'on observe que $K\cos\omega$ est > 0 et que la racine positive convient seule, on trouve

$$\frac{b}{h} = -\frac{\rho}{2\rho'}K\sin\omega + \sqrt{\left(\frac{\rho}{2\rho'}K\sin\omega\right)^2 + \frac{\rho}{3\rho'}K\cos\omega},$$

ou bien

(91) $$\frac{b}{h} = \frac{\frac{\rho}{3\rho'}K\cos\omega}{\frac{\rho}{2\rho'}K\sin\omega + \sqrt{\left(\frac{\rho}{2\rho'}K\sin\omega\right)^2 + \frac{\rho}{3\rho'}K\cos\omega}} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{\operatorname{tg}\omega + \sqrt{\operatorname{tg}^2\omega + \frac{4\rho'}{3\rho}\frac{1}{K\cos\omega}}}.$$

Pour une valeur déterminée de ω, cette formule donne le rapport $\frac{b}{h}$ d'autant plus petit que le coefficient K est lui-même plus petit, ce qui devait être.

Supposons d'abord que l'épaisseur du mur soit juste suffisante pour l'équi-

libre. Alors K prend les valeurs 0,1716, 0,1765, etc., données ci-dessus, et, si la densité ρ' de la maçonnerie est les $\frac{3}{2}$ de celle, ρ, du massif pulvérulent, comme il arrive d'ordinaire avec une approximation suffisante, le rapport $\frac{b}{h}$ devient :

	pour $\omega = 0°$,	10°,	20°,	30°,	40°,	45°,
$\frac{b}{h}$ (minim. de stabilité) =	0,1953,	0,1866,	0,1802,	0,1761,	0,1786,	0,2060.

Si, au contraire, l'épaisseur b a la valeur strictement nécessaire pour que le mode d'équilibre le plus stable se produise, $K = \cos\omega$, et la formule (91) devient

(92) . . . . $$\frac{b}{h} = \frac{2}{3} \frac{1}{\operatorname{tg}\omega + \sqrt{\operatorname{tg}^2\omega + \frac{4\rho'}{3\rho}(1 + \operatorname{tg}^2\omega)}} :$$

alors le rapport $\frac{b}{h}$ décroît sans cesse à mesure que ω grandit, et l'on trouve, en posant toujours $\frac{\rho'}{\rho} = \frac{3}{2}$:

	pour $\omega = 0$,	10°,	20°,	30°,	40°,	45°,
$\frac{b}{h}$ (maxim. de stabilité) =	0,4714,	0,4107,	0,3486,	0,2887,	0,2325,	0,2060.

Pour une inclinaison donnée ω du talus sur l'horizon, les valeurs du rapport, $\frac{b}{h}$, de l'épaisseur d'un mur de soutènement vertical à sa hauteur, qui seront égales ou supérieures au nombre inscrit dans ce dernier tableau, assureront au massif la plus grande stabilité intérieure possible ; les valeurs moindres que le nombre donné par l'avant-dernier tableau seront au contraire incompatibles avec l'équilibre, ou trop faibles pour que le mur ne commence pas à se renverser ; enfin les valeurs intermédiaires correspondront à des degrés divers de stabilité de la structure du massif.

On voit que la règle adoptée dans la pratique, et d'après laquelle on donne à un mur de soutènement une épaisseur égale au tiers de sa hauteur, offre une sécurité suffisante, toutes les fois que le massif n'est pas très-surchargé ou n'est exposé qu'à des ébranlements négligeables.

Il importe d'observer que les formules précédentes ne s'appliquent qu'autant que la profondeur du massif terreux est assez grande, ou du moins assez

Digitized by Google

uniforme, pour que, dans les régions avoisinant le mur de soutènement, les pressions soient sensiblement égales partout à une même distance du talus supérieur. On néglige donc, en les employant, l'influence perturbatrice qu'exerce le sol sous-jacent quand il n'est pas parallèle à la surface libre du massif. Cette influence doit être insensible dans les circonstances ordinaires de la pratique; car, l'inclinaison ω s'y trouvant positive, la poussée, transmise de haut en bas parallèlement au talus supérieur, provient de couches terreuses réellement profondes. Mais il n'en serait pas de même si l'inclinaison ω était négative et que le massif n'eût plus, à quelque distance du mur, qu'une épaisseur insignifiante.

---

§ IX.

SUR L'ÉQUILIBRE-LIMITE EN GÉNÉRAL. ÉTUDE PARTICULIÈRE DE L'ÉTAT ÉBOULEUX QUI SE PRODUIT DANS UN MASSIF PULVÉRULENT, AU MOMENT OÙ UN MUR DE SOUTÈNEMENT COMMENCE A SE RENVERSER.

Formules générales de l'équilibre-limite des corps isotropes qui éprouvent de grandes déformations.

42. L'étude d'un massif pulvérulent à l'état dynamique n'est abordable que lorsqu'on se borne aux cas les plus simples. En effet, dans une masse sablonneuse dont les grains roulent ou glissent les uns sur les autres avec des vitesses relatives notables et éprouvent des déplacements excédant sans cesse leurs limites d'élasticité, les pressions doivent avoir des valeurs extrêmement complexes; car elles dépendent probablement, tout à la fois, et des déformations élastiques actuelles des couches, comme à l'état d'équilibre, et du nombre des états moléculaires distincts franchis par unité de temps, c'est-à-dire des vitesses relatives de glissement des mêmes couches, comme dans les fluides, à cela près que les coefficients dont ces vitesses s'y trouvent affectées, au lieu d'être constants, croissent sans doute, de même que le


Digitized by Google

coefficient d'élasticité $\mu = mp$, avec la pression moyenne p qui mesure l'intimité du contact des particules contiguës (*). La difficulté, du reste, serait également fort grande s'il s'agissait d'un solide plastique, que l'on *pétrirait* très-rapidement, et où les pressions auraient aussi des parties dynamiques fonctions des vitesses relatives de glissement.

Mais quand, au contraire, et c'est ce qui arrive presque toujours, les déformations s'effectuent avec assez peu de rapidité pour que les inerties soient négligeables et pour que les pressions exercées en chaque point ne diffèrent pas sensiblement des forces élastiques maxima, il devient facile d'établir des équations différentielles de l'équilibre-limite ainsi produit, pourvu que le corps, solide ou pulvérulent, soit et reste isotrope à l'état naturel.

Il importe d'observer que les déformations totales éprouvées, jusqu'à l'époque t, par une particule de matière de dimensions très-petites en tous sens, se composent alors de deux parties bien distinctes : ce sont, d'une part, les déformations, dites *non élastiques, persistantes, plastiques, etc.*, qui subsisteraient si la particule devenait, à l'époque t, isolée du reste du corps et abandonnée à elle-même de manière à n'être plus soumise à aucune pression extérieure ni intérieure (**); d'autre part, les petites *déformations élastiques*

(*) Les mouvements de faible amplitude, ou *élastiques*, qui peuvent se produire dans les massifs pulvérulents, me paraissent présenter peu d'intérêt, et je ne m'en occuperai pas. Leurs équations indéfinies se déduiraient de celles de l'équilibre (26), en y retranchant simplement de X, Y, Z les composantes $-\frac{d^2u}{dt^2}$, $-\frac{d^2v}{dt^2}$, $-\frac{d^2w}{dt^2}$, par unité de masse, de l'inertie. Ces équations, où les N, T ont les valeurs (25), ne sont pas linéaires, même approximativement, tant que les différences des pressions exercées en divers sens et aux divers instants se trouvent comparables à ces pressions elles-mêmes, comme dans les solides vibrants : il est donc impossible d'y satisfaire par des expressions de u, v, w proportionnelles à de simples sinus ou cosinus de fonctions linéaires du temps. Ainsi, les milieux pulvérulents ne peuvent pas, à l'état naturel et sous l'influence de leurs forces élastiques, exécuter de petits mouvements *pendulaires*; ils étouffent ou transforment en des mouvements d'une autre nature les vibrations, émanées de corps voisins, qui s'y propagent.

(**) On ne pourrait pas en général, *pour un corps d'étendue finie,* déduire, de la nullité des pressions extérieures, celle des pressions intérieures : mais on le peut pour un simple élément de volume, car la suppression des actions exercées sur sa surface entraîne l'annulation des six quantités N, T, qui ont des valeurs sensiblement pareilles dans toute son étendue; cette annulation s'obtient elle-même en faisant varier convenablement les six longueurs et inclinaisons respectives (dont dépendent les N, T) de trois lignes matérielles se croisant en un de ses points.

Digitized by Google

auxquelles est dû son état actuel de tension ou de compression. On pourrait considérer par suite à chaque instant, *pour tout élément matériel de volume en particulier :* 1° des *positions actuelles d'état naturel* (x, y, z) de ses divers points; 2° les *petits déplacements élastiques* qui séparent ces positions d'état naturel des positions vraies. Mais, en général, les coordonnées x, y, z dont il s'agit ne varient pas avec continuité quand on passe de la matière d'une particule à celle des particules voisines; car rien ne dit que les divers éléments de volume, si on les isolait d'abord en abandonnant chacun d'eux à lui-même, puis qu'on les plaçât les uns à côté des autres, pussent se juxtaposer ou se raccorder parfaitement. Ainsi, il n'existe généralement pas, dans l'état physique actuel du corps, des positions d'état naturel qui soient infiniment voisines pour deux points matériels infiniment voisins quelconques, ou dont les coordonnées puissent servir de variables indépendantes.

Les équations indéfinies (26) de l'équilibre (p. 29) n'auront donc de sens que si x, y, z y désignent non pas des coordonnées d'état naturel, mais les vraies coordonnées actuelles des diverses particules, comme je le supposerai dans ce paragraphe. A cette condition, elles restent applicables; et l'on sait même qu'il suffirait, pour les rendre tout à fait exactes, de joindre dans leurs premiers membres, à X, Y, Z, les composantes, changées de signe, de la petite accélération actuelle de l'élément de volume. Les formules (24) ou (25) [p. 27] des forces N, T subsisteront également si les ∂, g y désignent les déformations élastiques effectives; mais celles-ci n'admettront les expressions (15), (16) [p. 24] que dans la mesure où il y aura des coordonnées actuelles d'état naturel x, y, z, c'est-à-dire tant qu'on se bornera à les employer pour de simples éléments de volume à l'intérieur desquels on supposera ces expressions constantes, sans les différentier par rapport à x, y, z, ni sans poser, par suite, entre les N, T, des relations pareilles à (28bis) ou (28ter) [p. 31].

Les déformations élastiques d'un élément de volume parallélipipède restent très-petites à toute époque et varient d'ailleurs aussi graduellement que ses déformations totales, susceptibles, au contraire, d'atteindre de grandes valeurs : les variations de celles-ci pendant un instant dt, ou simplement les accroissements reçus, pendant cet instant, par l'unité de longueur actuelle

Digitized by Google

de ses trois arêtes et par les cosinus de leurs angles respectifs, se réduisent donc sensiblement aux six petites déformations persistantes produites sur l'élément durant le même temps dt. Supposons que les trois arêtes considérées soient, à l'époque t, parallèles aux axes de x, y, z; d'une part, les déformations élastiques actuelles de l'élément de volume seront les six quantités ∂, g; d'autre part, si u, v, w désignent, comme dans les traités d'hydrodynamique, les trois composantes, à l'époque t, de la vitesse au point quelconque x, y, z, ou que udt, vdt, wdt soient les petits déplacements éprouvés au bout du temps dt, les six accroissements dont il vient d'être parlé vaudront respectivement, d'après les formules (15) et (16) [p. 24],

$$\frac{du}{dx}dt,\quad \frac{dv}{dy}dt,\quad \frac{dw}{dz}dt,\quad \left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)dt,\quad \left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right)dt,\quad \left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)dt.$$

On vient de voir qu'il est permis de les regarder comme se confondant avec les déformations persistantes produites durant le temps dt. En outre, si a, b, c désignent les cosinus des angles qu'un élément rectiligne matériel quelconque partant du point (x, y, z) fait avec les axes, on trouve aisément, par l'application d'une formule connue (ne différant pas de celle du bas de la page 24 dont le premier membre est $\frac{du}{dx}$), que sa dilatation élastique et sa dilatation persistante pour l'instant dt, rapportée à l'unité de temps, ont les expressions respectives :

$$a^2\partial_x + b^2\partial_y + c^2\partial_z + bcg_{yz} + cag_{zx} + abg_{xy},$$
$$a^2\frac{du}{dx} + b^2\frac{dv}{dy} + c^2\frac{dw}{dz} + bc\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right) + ca\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right) + ab\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right).$$

Or un simple coup d'œil jeté sur les faits montre que, de toutes les fibres rectilignes qui se croisent en un point, les plus *tendues* sont aussi, dans un corps isotrope, celles qui éprouvent actuellement les *dilatations persistantes* les plus grandes. Il est donc naturel de supposer le rapport de celles-ci aux dilatations élastiques,

$$(\alpha)\quad \ldots\quad \frac{a^2\frac{du}{dx} + b^2\frac{dv}{dy} + c^2\frac{dw}{dz} + bc\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right) + ca\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right) + ab\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)}{a^2\partial_x + b_2\partial_y + c^2\partial_z + bcg_{yz} + cag_{zx} + abg_{xy}},$$

Digitized by Google

positif et indépendant des cosinus a, b, c qui fixent la direction de la fibre considérée. En posant, soit $b=0, c=0$, soit $c=0, a=0$, soit $a=0, b=0$, on trouve que ce rapport a pour valeur l'une quelconque des trois fractions

$$\frac{1}{\partial_x}\frac{du}{dx}, \quad \frac{1}{\partial_y}\frac{dv}{dy}, \quad \frac{1}{\partial_z}\frac{dw}{dz},$$

et qu'il peut, par suite, se réduire à

$$\frac{bc\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)+ca\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right)+ab\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)}{bcg_{yz}+cag_{zx}+abg_{xy}}.$$

Mais si l'on y fait alors, soit $a=0$, soit $b=0$, soit $c=0$, on voit qu'il égale aussi l'une quelconque des fractions

$$\frac{1}{g_{yz}}\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right), \quad \frac{1}{g_{zx}}\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right), \quad \frac{1}{g_{xy}}\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right).$$

Admettre, comme *expression d'une loi physique fondamentale*, l'invariabilité du rapport (α) pour tous les éléments rectilignes qui se croisent en un même point, cela revient ainsi à supposer les six déformations élastiques actuelles ∂, g proportionnelles aux six vitesses correspondantes de dilatation ou de glissement

$$\frac{du}{dx}, \quad \frac{dv}{dy}, \quad \frac{dw}{dz}, \quad \frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}, \quad \frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}, \quad \frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx},$$

ou, ce qui est la même chose, à poser la quintuple égalité continue

$$(\alpha') \quad \frac{\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}}{\partial_x+\partial_y+\partial_z}=\frac{\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dy}}{\partial_x-\partial_y}=\frac{\frac{dv}{dy}-\frac{dw}{dz}}{\partial_y-\partial_z}=\frac{\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}}{g_{yz}}=\frac{\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}}{g_{zx}}=\frac{\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}}{g_{xy}}.$$

D'après les formules (24) (prises avec $A=0$) et (25) [p. 27], les déno-

Digitized by Google

minateurs de ces six fractions (α') sont entre eux, si le corps est pulvérulent, dans les mêmes rapports que

$$0,\ \frac{1}{2}(N_1 - N_2),\ \frac{1}{2}(N_2 - N_3),\ T_1, T_2, T_3,$$

ou, s'il est solide, dans les mêmes rapports que

$$\frac{\mu}{3\lambda + 2\mu}(N_1 + N_2 + N_3),\ \frac{1}{2}(N_1 - N_2),\ \frac{1}{2}(N_2 - N_3),\ T_1, T_2, T_3.$$

On peut donc, des cinq relations (α'), éliminer les ∂, g, de manière à n'y laisser subsister que les N, T et les dérivées en x, y, z des vitesses u, v, w. Si, en particulier, le corps est supposé beaucoup moins compressible que déformable ou qu'on ait sensiblement $\partial_x + \partial_y + \partial_z = 0$, elles deviennent :

$$(\beta)\ \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,\ \frac{2\left(\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy}\right)}{N_1 - N_2} = \frac{2\left(\frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz}\right)}{N_2 - N_3} = \frac{\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}}{T_1} = \frac{\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}}{T_2} = \frac{\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}}{T_3}.$$

M. de Saint Venant était arrivé aux quatre dernières relations (β) en admettant que la pression exercée sur chaque élément plan n'a pas de composante tangentielle dans la direction suivant laquelle il n'y a pas, durant l'instant dt, de glissement mutuel des couches parallèles à l'élément plan.

On a déjà, entre les six forces inconnues N, T et les trois composantes u, v, w de la vitesse, les huit équations indéfinies (26) [p. 29] et (β). Il ne reste plus à trouver qu'une dernière relation indéfinie. Ce sera précisément l'équation caractéristique de l'état plastique ou ébouleux, celle qui exprime que les déformations ∂, g atteignent à tout instant les limites d'élasticité les plus écartées que comportent la substance et le mode de distribution des pressions employé. Si $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ désignent les trois dilatations élastiques principales au point quelconque (x, y, z), leur différence maxima $\partial_1 - \partial_3$, dans l'équilibre-limite, acquiert, pour chaque valeur donnée de la dilatation cubique $\partial_1 + \partial_2 + \partial_3$ et du rapport $\frac{\partial_1 - \partial_2}{\partial_2 - \partial_3}$ des différences de la dilatation moyenne ∂_2 aux deux extrêmes, une valeur déterminée, d'autant plus grande

Digitized by Google

que les limites d'élasticité sont plus larges. En appelant donc f une certaine fonction positive, il viendra

$$(\gamma) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \partial_1 - \partial_3 = f\left(\partial_1 + \partial_2 + \partial_3, \frac{\partial_1 - \partial_2}{\partial_2 - \partial_3}\right),$$

ou, dans le cas d'un corps sensiblement incompressible pour lequel $\partial_1 + \partial_2 + \partial_3 = 0$,

$$(\gamma') \quad \ldots\ldots \quad \partial_1 - \partial_3 = f\left(\frac{\partial_1 - \partial_2}{\partial_2 - \partial_3}\right) = f\left(\frac{\partial_1 - \partial_2}{\partial_1 + 2\partial_2}\right) = f\left(\frac{-2\partial_2 - \partial_3}{\partial_2 - \partial_3}\right).$$

On substituera dans (γ) ou (γ'), à $\partial_1, \partial_2, \partial_3$, leurs valeurs tirées des formules (5) ou (10) et contenant F_1, F_2, F_3, puis on y supposera ces forces élastiques principales F évaluées en fonction des N, T, de manière à transformer l'équation (γ) ou (γ') en une relation sous forme finie entre les six pressions N, T. Les coefficients d'élasticité λ, μ ou m qui y paraîtront pourront être regardés comme constants; car il est naturel d'admettre, et l'expérience prouve, qu'ils restent à peu près les mêmes dans un corps que l'on déforme sans diminuer ni accroître sensiblement sa densité.

S'il agit, par exemple, d'un solide plastique, la formule (γ') devient

$$(\gamma'') \quad \ldots\ldots\ldots \quad F_1 - F_3 = 2\mu f\left(\frac{\partial_1 - \partial_2}{\partial_2 - \partial_3}\right) = 2\mu f\left(\frac{F_1 - F_2}{F_2 - F_3}\right).$$

Dans les problèmes de déformations planes, dans celui de la torsion d'un cylindre circulaire, etc., on a $\partial_2 = 0$, $\partial_3 = -\partial_1$, et cette formule se réduit à $F_1 - F_3 =$ une constante $2\mu f(1)$ ou 2K, comme on a vu au n° 26 (p. 58). Dans les questions également simples de l'extension, de la compression et de la flexion circulaire d'un prisme, la dilatation moyenne ∂_2 est égale, par raison de symétrie, à la dilatation la plus petite, ∂_3, pour les fibres tendues, à la plus grande, ∂_1, pour les fibres contractées. La formule (γ'') donne donc alors à la différence $F_1 - F_3$ des forces élastiques extrêmes les valeurs respectives constantes $2\mu f(\infty)$, $2\mu f(0)$, qui peuvent différer l'une de l'autre et différer aussi de la valeur $2\mu f(1)$ relative au cas $\partial_2 = 0$. Ainsi, dans les problèmes particulièrement importants dont il vient d'être parlé, on aura pour équation spéciale à l'équilibre-limite $F_1 - F_3 =$ une constante 2K;

Digitized by Google

mais la quantité K ne sera probablement pas tout à fait la même pour les trois cas. Néanmoins, les expériences de M. Tresca tendent à montrer qu'on peut, sans grande erreur, poser simplement $F_1 - F_3 =$ une constante à l'intérieur de tout corps solide homogène à l'état plastique, au moins quand ce corps est beaucoup plus déformable que compressible.

Outre les équations indéfinies, il y aura des conditions spéciales à la surface du corps. Elles consisteront : 1° pour les points où la pression extérieure sera connue, à égaler les composantes respectives des forces que supporteront les deux faces d'une couche superficielle; 2° contre une paroi fixe, à y supposer la vitesse de même sens que la composante tangentielle de la poussée exercée sur l'élément de paroi contigu, et à égaler à un coefficient constant de frottement extérieur le rapport de cette composante tangentielle à la composante normale de la poussée; 3° pour les autres points, à s'y donner à chaque époque les composantes effectives u, v, w de la vitesse. Ces dernières conditions seront absolument nécessaires au calcul des grandeurs absolues de u, v, w, dont les équations indéfinies (α') ou (β) déterminent *tout au plus* les rapports aux divers points.

Enfin, le corps reste généralement à l'état élastique ou stable dans une région plus ou moins grande. On obtient l'équation de la surface variable qui sépare cette région de celle où il se produit des déformations persistantes, en exprimant que la limite d'élasticité commence précisément à y être atteinte, en ce sens qu'elle l'est presque un peu à côté, dans la partie dont la contexture ne s'altère pas. Il faut remarquer en effet que les déformations, soit persistantes, soit élastiques, varient avec continuité dans toute l'étendue du corps, dont l'état se transforme graduellement d'un point aux points voisins, pourvu qu'il n'y ait pas de rupture : seulement, les premières sont insensibles, ou du moins à fort peu près invariables d'un instant à l'autre, dans la partie où la constitution moléculaire est stable, tandis que les secondes atteignent, dans l'autre partie, les limites d'élasticité les plus écartées que comportent la substance et les modes de déformation employés. Je néglige, pour simplifier, une troisième région intermédiaire, probablement peu étendue dans les corps mous, et où la matière, à l'état dit d'*élasticité imparfaite,* est en voie de *s'écrouir,* c'est-à-dire d'élargir

Digitized by Google

ses limites d'élasticité incessamment atteintes mais encore susceptibles de s'écarter.

On peut voir dans un mémoire de M. de Saint-Venant, au tome de 1871 du *Journal de Mathématiques de M. Liouville* (*), comment les formules ci-dessus conduisent aisément aux lois de la torsion d'un cylindre circulaire et à celles de la flexion égale d'un prisme, quand les déformations dépassent les limites d'élasticité.

Constance de la vitesse d'écoulement du sable par un orifice.

42[bis]. L'équation indéfinie (γ') présente une particularité remarquable lorsqu'il s'agit d'une masse pulvérulente ou que, d'après les formules (14) [p. 22], les différences $\partial_1 - \partial_3$, $\partial_1 - \partial_2$, $\partial_2 - \partial_3$ varient seulement avec les rapports mutuels des pressions N, T : alors cette équation, pareillement aux cinq relations indéfinies (β) et aux conditions concernant la surface-limite de la masse en état ébouleux, ne cesse pas d'être satisfaite quand, pour de mêmes valeurs de u, v, w, on fait varier partout les N, T dans un rapport constant quelconque. Par suite, si la partie (du massif) où se produit l'éboulement a un poids assez faible, en comparaison de la différence des pressions qu'elle supporte en sens opposés, pour qu'on puisse supprimer des trois équations indéfinies (26) [p. 29] les termes ρX, ρY, ρZ, ou rendre ces équations homogènes comme les autres en N, T, les pressions pourront y varier partout dans un même rapport quelconque sans cesser de se faire équilibre et sans que rien soit changé aux vitesses u, v, w.

Concevons, par exemple, un réservoir percé en son fond d'un orifice assez petit pour que la plus grande partie d'une masse pulvérulente qu'on y introduira soit en quelque sorte immobile, et admettons en outre que cette masse ait un coefficient de frottement intérieur assez grand pour que,

(*) Complément à de précédents mémoires, etc. — Voir aussi, du même auteur : 1° un article inséré aux *Comptes rendus* de l'Académie des sciences de Paris (t. LXXIV, 15 avril 1872), sur un cas particulier très-remarquable de déformations planes, savoir le cas d'un anneau cylindrique dont les fibres parallèles à l'axe s'écartent de cet axe, symétriquement tout autour, en conservant leur parallélisme et leur hauteur; 2° un autre article du 20 nov. 1871 (t. LXXIII) sur la torsion d'un cylindre circulaire (où une note, relative à la *détorsion* qui se produira si l'on abandonne à lui-même le cylindre tordu, me paraît seule devoir être modifiée, à raison de ce qu'il n'y est pas tenu compte de l'état actuel de tension élastique *maxima* des couches en équilibre-limite).


Digitized by Google

sous des charges modérées, les accélérations de l'autre partie soient au plus comparables à la gravité g. Il est clair que la pression moyenne p, nulle à l'orifice, croîtra rapidement en allant de là vers l'intérieur; par suite, le poids de la masse en mouvement et ses inerties seront négligeables, dans les formules (26), en comparaison des dérivées des N, T. Ces équations, ainsi simplifiées, jointes aux autres équations du problème, détermineront, pour les divers points de la partie du réservoir où le sable coule, des valeurs des pressions N, T qui se feront mutuellement équilibre, tout en s'annulant à l'orifice; de plus, quelque grande que soit la charge, ces pressions conserveront entre elles leurs rapports, et les mêmes valeurs de u, v, w ne cesseront pas de satisfaire aux équations considérées. Par conséquent, dès que la hauteur de charge est beaucoup plus grande que les dimensions de l'orifice, les pressions qui en résultent sont sensiblement neutralisées par les frottements, et l'écoulement ne se produit que sous l'influence de causes bien plus faibles, négligées dans notre analyse. D'ailleurs ces causes ne grandissent pas indéfiniment avec la charge : car les pressions N, T, dans la région où les vitesses sont sensibles, se font équilibre quant à leur partie principale ou croissante avec la charge; elles ne peuvent contribuer à produire les accélérations et conséquemment les vitesses u, v, w, concurremment avec la pesanteur, que par leurs parties négligées, qui ne cessent pas d'être comparables au poids de la matière en mouvement. *Dans un écoulement de sable par un orifice, la vitesse tend donc vers une limite dès que la hauteur de charge devient un peu grande, et elle se maintient dès lors constante.* Ainsi s'explique l'uniformité de l'écoulement qu'obtenaient les anciens avec les sabliers dont ils se servaient pour mesurer le temps (*).

(*) On voit que ce fait n'est nullement l'indice d'une prétendue impossibilité où se trouverait un massif sablonneux, comprimé dans certains sens, de transmettre dans les sens perpendiculaires une fraction sensible des pressions qu'il supporte, comme a cru pouvoir l'inférer M. Beaudemoulin, ancien ingénieur en chef des ponts et chaussées, dans un travail (*Études sur une propriété spéciale du sable et sur ses applications*) imprimé au recueil des *Mémoires de la Société des ingénieurs civils* (Paris, 1874). Si, conformément à la thèse soutenue dans ce travail, le sable était absolument dépourvu d'élasticité, il n'y aurait pas de *poussée* des terres, et il suffirait, pour soutenir un massif coupé verticalement, de le recouvrir d'un léger enduit qui empêchât les particules superficielles de se détacher. Les appareils de décintrement, par le sable, de l'honorable ingénieur n'en constituent pas moins une invention aussi ingénieuse qu'utile.

Digitized by Google

L'état ébouleux s'établit à la fois dans une portion notable des massifs. — Ses équations différentielles.

43. Dans l'hypothèse particulière de déformations planes, à laquelle on peut se borner le plus souvent lorsqu'on traite de la poussée des terres, les composantes T_1, T_2, N_3 valent respectivement $0, 0, -p$, comme on a vu à la page 30 (et comme le montreraient d'ailleurs les formules (β) où l'on ferait $w = 0, \frac{du}{dz} = 0, \frac{dv}{dz} = 0$) : alors il suffit de joindre aux deux équations indéfinies (28) [p. 30] la relation caractéristique de l'équilibre-limite, ainsi que les conditions définies où paraissent les N, T, pour avoir toutes les formules nécessaires à la détermination des pressions. On peut donc se dispenser de calculer les vitesses u, v, et c'est ce que je ferai dans les numéros suivants (*).

Je considérerai d'abord un massif sablonneux pesant dont la surface supérieure sera plane, et je supposerai que, venant de s'ébranler par suite d'un commencement de renversement du mur qui le soutenait, il s'éboule avec des vitesses encore petites.

A un pareil moment, l'état ébouleux s'établit-il le long d'une simple ligne horizontale parallèle à l'intersection du mur et du talus supérieur, ou bien sur toute l'étendue d'une *surface de rupture*, lieu géométrique d'une infinité de droites pareilles, ou enfin atteint-il presque instantanément un volume fini de la matière du massif?

Si le massif était solide et qu'un *coin* de matière tendît à s'en détacher, la rupture se produirait d'abord tout le long de la droite horizontale, perpendiculaire aux plans des déformations, sur laquelle se trouverait *le point dangereux* relatif à chacun de ces plans, c'est-à-dire le point où la dilatation principale et positive ∂_1 atteindrait sa plus grande valeur. Elle se propage-

(*) Le calcul des vitesses u, v semble devoir être beaucoup plus difficile. On peut voir, dans un article des *Comptes rendus* (t. LXXIV, 12 février 1872), quelle équation aux dérivées partielles du second ordre, linéaire mais à coefficients variables, il faudrait intégrer pour les déterminer. Dans cette équation, les variables indépendantes sont les coordonnées curvilignes orthogonales définies par les deux familles de cylindres *isostatiques* (ou mieux *orthostatiques*) produits dans le milieu. Ces cylindres, sur toute l'étendue desquels les pressions exercées sont normales, jouissent eux-mêmes, dans un milieu, à l'état plastique ou ébouleux, soumis à des pressions très-supérieures à son poids, d'intéressantes propriétés : je les ai étudiées dans trois autres articles insérés aux *Comptes rendus* (22 et 29 janvier 1872, t. LXXIV, et 22 septembre 1873, t. LXXVII).

Digitized by Google

rait de là sur une autre droite, parallèle et voisine, comprenant la série des points dangereux qui correspondraient à l'état suivant du massif. De proche en proche, celui-ci se trouverait divisé en deux, suivant une surface cylindrique de rupture, sans avoir jamais pu, en quelque sorte, utiliser pour sa défense tous les moyens de résistance à la destruction que possédaient ses diverses parties. En effet, ce serait seulement aux points dangereux, formant à chaque instant une ligne matérielle d'une largeur et d'une épaisseur insensibles (ou tout au plus une surface dans le cas d'un massif qui glisserait en bloc sur une couche sous-jacente de faible cohésion parallèle au talus supérieur), que la *tension,* l'effort opposé à la séparation des parties, aurait atteint sa valeur-limite. L'état d'équilibre que nous voulons étudier n'existerait par conséquent, à un moment quelconque, que dans une étendue infiniment petite.

Mais il n'en sera pas ainsi; car les particules des milieux pulvérulents jouissent d'une mobilité que n'ont pas celles des corps solides, et il est naturel d'admettre que la difficulté moindre qu'elles éprouvent à se déplacer les unes par rapport aux autres permet à ces milieux de résister dans une mesure plus égale au genre de rupture qu'ils présentent quand ils s'éboulent. Effectivement, dans tous les modes d'équilibre stable considérés aux paragraphes précédents, les déformations ∂_1 sont constantes aux divers points du massif, en sorte que *ces points deviennent dangereux tous à la fois.* On peut donc admettre que, *lorsqu'un mur qui soutient des terres sans cohésion commence à se renverser, l'équilibre-limite s'établit presque immédiatement jusqu'à une distance assez grande en arrière de sa face postérieure,* en ne délaissant tout au plus que des régions restreintes du massif, comme, par exemple, une couche plus ou moins épaisse contiguë au mur et protégée par son frottement. Les équations même de l'équilibre-limite indiqueront dans quels cas une certaine portion de terre adjacente à la face postérieure du mur se trouvera ainsi préservée au commencement de la chute.

Ces équations comprennent, comme il vient d'être dit :

1° Les deux relations indéfinies (28) [p. 30] qui expriment l'équilibre de translation d'un élément de volume rectangulaire;

2° Une troisième équation indéfinie, signifiant qu'en tous les points du

Digitized by Google

massif la limite d'élasticité est atteinte, ou, ce qui revient au même (p. 56), que l'inclinaison maxima des pressions sur les normales respectives aux éléments plans qu'elles sollicitent est en chaque point égale à l'angle φ de frottement intérieur; d'après la formule (66bis) [p. 55], devenue une égalité et où R désigne le radical (31) [p. 32], cette relation n'est autre que

$$(93)\qquad \frac{1}{p}\sqrt{T^2+\left(\frac{N_2-N_1}{2}\right)^2}=\sin\varphi,\quad \text{ou}\quad \sqrt{T^2+\left(\frac{N_2-N_1}{2}\right)^2}=-\frac{N_1+N_2}{2}\sin\varphi;$$

élevée au carré, elle prend la forme que Macquorn-Rankine lui a donnée

$$(94)\quad \ldots\ldots\ldots\ 4T^2+(N_2-N_1)^2-(N_1+N_2)^2\sin^2\varphi=0;$$

3° Enfin des conditions spéciales, soit à la surface libre ou talus supérieur, soit à la surface de séparation du massif et du mur de soutènement. Les premières reviennent à dire que les deux composantes, normale et tangentielle, de la pression exercée par le massif sur sa couche superficielle, sont nulles en tous les points de la surface libre : ces conditions, combinées avec l'équation indéfinie (94), obligent de poser tout à la fois

$$(95)\quad \ldots\ldots\ N_1=0,\quad N_2=0,\quad T=0\quad \text{(à la surface libre)}.$$

Une dernière relation, spéciale à la face postérieure du mur, ne s'applique qu'autant que les particules contiguës du massif sont sur le point d'y éprouver des glissements finis, circonstance qui semble devoir se produire dès le commencement de renversement du mur, toutes les fois qu'elle ne sera pas en contradiction avec les autres équations du problème. Or sa réalisation exige que l'angle fait en chaque point, avec le prolongement de la normale à la face postérieure du mur, par la poussée qui lui est appliquée, vaille précisément l'angle du frottement maximum du mur et de la matière sablonneuse du massif.

L'introduction de cette dernière condition dans la nouvelle théorie est due à M. Maurice Levy (*).

(*) Poncelet l'avait déjà employée dans l'ancienne (*Mémoire sur la stabilité des revêtements*, n° 138, au n° 13 du *Mémorial de l'officier du génie*, 1840).


Digitized by Google

Macquorn-Rankine, dans son mémoire *On the stability of loose Earth* (*), aux TRANSACTIONS PHILOSOPHIQUES de Londres (1856-1857), assimile un massif limité par un mur à un massif indéfini; il se contente d'exprimer qu'en vertu de l'hypothèse faite de frottements maximums en chaque point au moment où un éboulement commence, le poids du massif est neutralisé autant que possible par ces frottements, et la poussée exercée sur le mur réduite par suite à sa valeur minimum, quand l'éboulement tend à se produire de haut en bas, tandis que le contraire aurait lieu, et que la poussée deviendrait maximum, si le mur, au lieu de s'éloigner, se rapprochait des terres en les comprimant.

Intégration de ces équations, quand la face postérieure du mur a une certaine inclinaison sur la verticale, ou que l'angle du frottement extérieur a une certaine valeur.

44. Toutes ces conditions, à l'exception de la dernière, relative à la paroi, se trouvent évidemment vérifiées par les deux solutions que nous avons précédemment étudiées aux nos 33, 34 (pp. 72 à 77), et qui se sont présentées à nous comme répondant à deux cas extrêmes de l'équilibre ordinaire ou d'élasticité d'un massif sans cohésion. Or, si

$$i$$

désigne l'inclinaison du mur de soutènement sur la verticale, chacune de ces solutions donnera, en y posant

$$\varepsilon_1 = i,$$

une certaine valeur φ_1 [seconde formule (77)] pour l'angle que fera, avec le prolongement de la normale aux éléments plans qui ont précisément la direction du mur, la poussée exercée sur ces éléments plans, et il pourra bien arriver que φ_1 vaille justement l'angle de frottement mutuel du mur et du massif. Admettons qu'il en soit ainsi : alors toutes les conditions de l'équilibre-limite seront vérifiées par la solution considérée, et celle-ci pourra être admise, pourvu qu'elle soit d'ailleurs celle qui donne les valeurs minima des poussées, dans le cas ordinaire où il s'agit d'un équilibre-limite correspondant à *un éboulement par détente,* ou, au contraire, celle qui donne les valeurs maxima, s'il s'agissait d'un équilibre-limite correspondant à *un éboulement par compression.*

(*) M. Flamant, ingénieur des ponts et chaussées à Lille, vient d'en publier une traduction française dans les *Annales des ponts et chaussées* (5e série, t. VIII, 1874).

Digitized by Google

En se bornant à la première solution, la plus intéressante pour la pratique, on obtient les résultats donnés par Rankine et par M. Levy. Ils sont résumés dans les formules (77), si l'on adopte pour ψ la plus petite, en valeur absolue, des racines que donne la première de ces formules. En particulier, les deux composantes, normale $-\mathfrak{N}$ et tangentielle $\mathfrak{T}$, de la poussée exercée par unité d'aire aux divers points du mur, s'obtiendront en posant $\varepsilon_1 = i$. Quant à leur résultante $\mathfrak{R}$, elle vaudra $\frac{\mathfrak{T}}{\sin\varphi_1}$. Il sera préférable d'y remplacer, comme au n° 35 (p. 78), la distance l normale au talus supérieur par la distance oblique L, mesurée le long du mur même, et telle, que $l = \mathrm{L}\cos(\omega - i)$. On composera ensuite toutes les poussées élémentaires en une seule poussée totale P, comme il a été fait au n° 35, et il viendra finalement, au lieu des formules (82) :

$$(96) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{L}_1 = \dfrac{2}{3}\mathrm{L}, \quad \mathrm{P} = \mathrm{K}\dfrac{\rho g \mathrm{L}^2}{2}, \\ \text{avec} \quad \sin(\omega + 2\psi) = \dfrac{\sin\omega}{\sin\varphi}, \quad \operatorname{tg}(\varphi_1 + i + \psi) = \dfrac{\operatorname{tg}(i+\psi)}{\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}\right)}, \\ \mathrm{K} = \dfrac{\sin\varphi}{2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}\right)} \dfrac{\cos(\omega - i)\cos\psi\sin 2(i+\psi)}{\cos(\omega+\psi)\sin\varphi_1}. \end{array} \right.$$

Ainsi, *quand un mur de soutènement commence à se renverser, et que l'angle du frottement extérieur a précisément la valeur φ_1 résultant de la quatrième équation* (96), *l'état ébouleux s'établit dans toute l'étendue du massif dès que le dernier mode d'équilibre d'élasticité comprenant toute cette étendue cesse d'exister*. La raison en est qu'une seule et même distribution des pressions convient à ces deux états, qui peuvent se suivre sans discontinuité. Au contraire, quand l'angle du frottement extérieur est plus grand que la racine φ_1 de l'équation considérée (96), l'inclinaison de la poussée sur le prolongement de la normale à la face postérieure du mur se trouve trop faible pour que l'état ébouleux se produise, dans la région contiguë au mur, dès l'instant où le dernier équilibre d'élasticité commun à tout le massif disparaît. Il doit arriver alors, ou bien qu'un coin de matière adjacent au mur reste constamment à l'état élastique, du moins durant la période initiale du

Digitized by Google

renversement, seule considérée ici, pendant laquelle les vitesses sont encore insensibles, ou bien que l'état ébouleux se propage rapidement dans cette région, de manière à s'étendre à tout le massif au bout d'un instant très-court. Le n° 47 ci-après contient l'étude de ces circonstances intéressantes.

Cas où l'angle du frottement extérieur est égal à celui du frottement intérieur φ.

45. Les murs que l'on construit effectivement sont toujours assez rugueux pour immobiliser une couche mince du massif qu'ils soutiennent, et c'est contre cette couche que peut glisser le reste de la masse inconsistante.

L'angle de frottement extérieur vaut alors φ. En effet, lorsque deux couches contiguës d'un corps pulvérulent sont soumises à des actions, graduellement croissantes d'instant en instant, qui tendent à les faire glisser l'une contre l'autre, les ruptures ou les glissements *finis* se produisent, d'après la loi expérimentale et usuelle du frottement, suivant les éléments plans pour lesquels l'inclinaison de la pression qu'ils supportent sur leur normale est maxima et atteint une valeur déterminée, qui est l'angle de frottement naturel de terre sur terre : or φ désigne précisément, comme on a vu au n° 25 (p. 56), l'inclinaison maxima dont il s'agit aux points où une rupture est imminente. Donc *l'angle de frottement mutuel de terre sur terre, à l'instant où un glissement fini tend à s'effectuer, est bien égal à l'angle φ de frottement intérieur ou de terre coulante.*

En conséquence, les formules précédentes ne sont applicables qu'autant que le mur a précisément la direction des éléments plans pour lesquels l'inclinaison de la pression qu'ils supportent sur le prolongement de leur normale atteint sa valeur maxima φ.

On a vu au n° 33 (p. 75) que l'élément plan soumis à la pression minimum fait l'angle $-\psi$ avec la verticale ; d'après la loi qui termine le n° 25 (p. 57), l'inclinaison du mur sur cet élément plan devra être $\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}$, ce qui donne deux directions, ou deux valeurs possibles, $-\psi\pm\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)$, de i. Dans la pratique, la première sera la seule assez petite en valeur absolue pour être admissible. On ne pourra donc employer les formules (96) dans des calculs d'équilibre-limite qu'autant que l'inclinaison des murs de soutènement sur la verticale sera

$$(97) \qquad i=\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}-\psi.$$

Digitized by Google

A cette condition, l'angle φ_1 atteindra bien sa valeur maxima φ.

L'expression (96) de K devient alors extrêmement simple. On peut d'abord y faire

$$2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = 1 + \sin \varphi, \quad \varphi_1 = \varphi,$$

et, d'après (97),

$$(97^{bis}) \quad \ldots\ldots \quad 2(i + \psi) = \frac{\pi}{2} - \varphi;$$

ce qui la réduit à

$$(98) \quad \ldots\ldots \quad K = \frac{\cos \varphi \cos \psi \cos (\omega - i)}{(1 + \sin \varphi) \cos (\omega + \psi)}.$$

Il est actuellement facile d'en éliminer ω. La troisième équation (96), si on y remplace $\sin(\omega + 2\psi)$ par $\sin \omega \cos 2\psi + \cos \omega \sin 2\psi$, donne

$$(98^{bis}) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\cos \omega}{1 - \sin \varphi \cos 2\psi} = \frac{\sin \omega}{\sin \varphi \sin 2\psi}:$$

en d'autres termes, le cosinus et le sinus de ω sont proportionnels à $1 - \sin \varphi \cos 2\psi$ et à $\sin \varphi \sin 2\psi$. Par suite, $\cos(\omega - i)$, ou $\cos \omega \cos i + \sin \omega \sin i$, sera proportionnel à

$$\cos i - \sin \varphi (\cos i \cos 2\psi - \sin i \sin 2\psi) = \cos i - \sin \varphi \cos [2(i + \psi) - i]$$
$$= \cos i - \sin \varphi \cos \left[\frac{\pi}{2} - (\varphi + i)\right] = \cos i - \sin \varphi (\sin \varphi \cos i + \cos \varphi \sin i)$$
$$= \cos^2 \varphi \cos i - \cos \varphi \sin \varphi \sin i = \cos \varphi \cos (\varphi + i).$$

D'autre part, $\cos(\omega + \psi)$, ou $\cos \omega \cos \psi - \sin \omega \sin \psi$, sera également proportionnel à

$$\cos \psi - \sin \varphi (\cos \psi \cos 2\psi + \sin \psi \sin 2\psi) = \cos \psi (1 - \sin \varphi).$$

Le quotient de $\cos(\omega - i)$ par $\cos(\omega + \psi)$ est donc égal à

$$\frac{\cos \varphi \cos (\varphi + i)}{\cos \psi (1 - \sin \varphi)},$$

et la formule (98) devient

$$(99) \quad \ldots\ldots \quad K = \cos (\varphi + i).$$

Digitized by Google

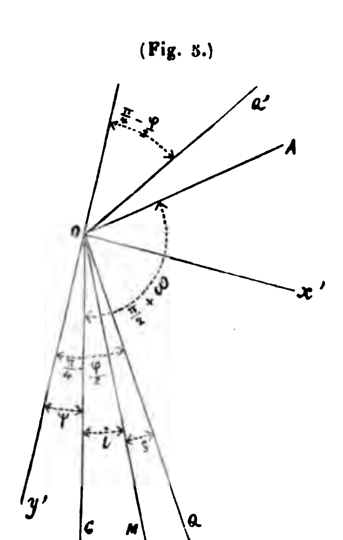
Cette formule (99) est due à M. Maurice Levy (voir les nos 18 et 19 de son Mémoire). La démonstration précédente joint à l'avantage de la simplicité celui de déduire la valeur particulière (99) de l'expression plus générale (96) de K.

Intégration approchée pour des murs d'une inclinaison différente.

46. M. de Saint-Venant a indiqué une méthode approchée (*) pour obtenir les lois de l'équilibre-limite quand l'angle φ_1 du frottement extérieur, au lieu d'être celui que donne la quatrième formule (96), en diffère d'une quantité assez petite, mais sensible. Cette méthode consiste à joindre, aux expressions (77), alors erronées, de $\mathfrak{T}$ et de $-\mathfrak{N}$, les petits termes complémentaires qui doivent les rendre exactes, et à substituer ces valeurs totales dans les équations de l'équilibre, en négligeant, dans (94), les produits et les carrés des petits termes complémentaires vis-à-vis de leurs premières puissances. J'ai traité à sa demande ce problème dans une note insérée au *Compte rendu* du 4 avril 1870 (**). Mais il y a moyen de simplifier beaucoup les calculs en changeant d'axes coordonnés, comme je vais faire ici.

Je choisirai l'axe des y' suivant la droite, menée à partir de l'origine O (fig. 5), qui fait avec la verticale l'angle $-\psi$, et qui, dans le cas où les formules (77) sont applicables, se trouve justement parallèle aux éléments plans soumis à la pression minima, ainsi qu'on l'a vu vers la fin du n° 33. Par suite, dans le même cas, les directions des élements plans pour lesquels l'inclinaison de la pression qu'ils supportent sur le prolongement de leur normale atteint sa valeur la plus grande φ, sont celles des deux droites OQ, OQ', qui font respectivement avec Oy' les angles $\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}$ et $\pi-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)$. L'axe des x' sera la bissectrice de l'angle QOQ' et aura $\frac{\pi}{2}-\psi$ pour inclinaison sur la verticale OG.

(Fig. 5.)



(*) Voir le n° 7 de son mémoire inséré au *Compte rendu* de la séance du 14 février 1870 (t. LXX, p. 283).

(**) Tome LXX, p. 751. — Voir aussi, au même numéro du *Compte rendu*, p. 718, un article de M. de Saint-Venant sur le même sujet.

Digitized by Google

Les composantes N'_1, N'_2, T', suivant les nouveaux axes, des pressions (ou plutôt tractions) exercées sur les éléments plans qui leur seront perpendiculaires, se composeront :

1° De leurs parties correspondantes à la solution spéciale déjà étudiée, et qui valent $-\frac{\sin\psi}{\sin(\omega+\psi)}\rho g l$, $-\frac{\cos\psi}{\cos(\omega+\psi)}\rho g l$ [d'après (77ter)], pour N'_1, N'_2, et zéro pour $\mathfrak{T}'$;

2° De petites parties encore inconnues $\rho g n_1$, $\rho g n_2$, $\rho g t$.

On aura donc

$$(100) \quad N'_1 = \rho g\left[-\frac{\sin\psi}{\sin(\omega+\psi)}l + n_1\right], \quad N'_2 = \rho g\left[-\frac{\cos\psi}{\cos(\omega+\psi)}l + n_2\right], \quad T' = \rho g t.$$

Il faut porter ces valeurs dans les équations indéfinies d'équilibre relatives aux nouveaux axes. On n'a, pour obtenir celles-ci :

1° Qu'à accentuer x, y, N_1, N_2, T dans les formules (28) [p. 30], applicables à tout système d'axes rectangulaires situés dans le plan des xy, et à exprimer que l'inclinaison α de la pesanteur sur l'axe des y' vaut ici ψ; ce qui donne

$$(101) \quad \frac{dN'_1}{dx'} + \frac{dT'}{dy'} + \rho g \sin\psi = 0, \quad \frac{dT'}{dx'} + \frac{dN'_2}{dy'} + \rho g \cos\psi = 0;$$

2° Qu'à accentuer N_1, N_2, T dans l'équation (94), également la même pour tout système d'axes rectangulaires parallèles au plan de déformations, et qui devient

$$(101^{bis}) \quad 4T'^2 + (N'_2 - N'_1)^2 - (N'_2 + N'_1)^2 \sin^2\varphi = 0.$$

Enfin, il faut observer que la perpendiculaire l au talus supérieur OA, étant inclinée sur la verticale de ω et, par suite, sur Oy' de $\omega + \psi$, a pour expression

$$(101^{ter}) \quad l = x' \sin(\omega+\psi) + y' \cos(\omega+\psi).$$

Grâce à cette valeur de l, les expressions (100) de N'_1, N'_2, T', portées dans les deux équations (101), les réduisent à

$$(102) \quad \frac{dn_1}{dx'} + \frac{dt}{dy'} = 0, \quad \frac{dt}{dx'} + \frac{dn_2}{dy'} = 0.$$

Digitized by Google

La première de ces nouvelles relations revient à dire que n_1 et $-t$ sont les deux dérivées respectives en y' et en x' d'une fonction ϖ_1 de x', y'; la seconde signifie pareillement que n_2 et $-t$ sont les deux dérivées respectives en x' et en y' d'une même fonction ϖ_2. On a ainsi

$$-t=\frac{d\varpi_1}{dx'}=\frac{d\varpi_2}{dy'},$$

et ϖ_1, ϖ_2 sont les deux dérivées en y' et en x' d'une même fonction ϖ. Les deux équations (102) équivalent donc à celles-ci

$$(102^{bis}) \quad \ldots\ldots \quad n_1=\frac{d^2\varpi}{dy'^2}, \quad n_2=\frac{d^2\varpi}{dx'^2}, \quad t=-\frac{d^2\varpi}{dx'dy'};$$

ce qui ramène la détermination des trois inconnues n_1, n_2, t à celle de la fonction unique ϖ, ou plutôt à celle de ses trois dérivées secondes en x', y'.

Il reste, pour calculer ϖ, l'équation indéfinie (101bis), dans laquelle il faut substituer à N'_1, N'_2, T' leurs expressions (100) en négligeant les carrés et les produits des petites quantités n_1, n_2, t. Si l'on observe que

$$\frac{1}{2}(N'_2-N'_1)=\rho g\left[-\frac{\sin\omega}{\sin 2(\omega+\psi)}l+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\varpi}{dx'^2}-\frac{d^2\varpi}{dy'^2}\right)\right],$$
$$\frac{1}{2}(N'_2+N'_1)=\rho g\left[-\frac{\sin(\omega+2\psi)}{\sin 2(\omega+\psi)}l+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\varpi}{dx'^2}+\frac{d^2\varpi}{dy'^2}\right)\right],$$

et que $\sin(\omega+2\psi)=\frac{\sin\omega}{\sin\varphi}$ [en vertu de la première formule (77)], il viendra

$$-l\frac{\sin\omega}{\sin 2(\omega+\psi)}\left[(1-\sin\varphi)\frac{d^2\varpi}{dx'^2}-(1+\sin\varphi)\frac{d^2\varpi}{dy'^2}\right]=0,$$

ou bien

$$(103) \quad \ldots\ldots \quad \frac{d^2\varpi}{dy'^2}=\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}\frac{d^2\varpi}{dx'^2}=\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\frac{d^2\varpi}{dx'^2},$$

équation dont l'intégrale générale, avec deux fonctions arbitraires f_1, f_2, est

$$(104) \quad \varpi=\frac{\cos\psi}{\cos(\omega+\psi)}\left\{f_1\left[x'-y'\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\right]+f_2\left[x'+y'\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\right]\right\} (*).$$

(*) La simplicité de ce résultat invite à chercher la solution de la question analogue pour l'équilibre d'élasticité, c'est-à-dire à chercher tous les modes d'équilibre élastique du massif qui sont voisins d'un quelconque des modes étudiés dans le paragraphe précédent, et qui se

Digitized by Google

Cette expression de ϖ, différentiée deux fois et transportée dans (102bis), après avoir remplacé tg $\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)$ par $\sqrt{\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}}$, donne

$$(105)\quad n_1=\frac{\cos\psi\,(1-\sin\varphi)}{\cos(\omega+\psi)\,(1+\sin\varphi)}(f_1''+f_2''),\quad n_2=\frac{\cos\psi}{\cos(\omega+\psi)}(f_1''+f_2''),\quad t=\frac{\cos\psi\,(1-\sin\varphi)}{\cos(\omega+\psi)\cos\varphi}(f_1''-f_2''),$$

produisent, par exemple, quand les conditions aux parois sont plus compliquées que celles que nous avons admises, ou encore quand le profil des contours-limites est légèrement courbe.

Rapportons le milieu à des axes de coordonnées des x' et des y' parallèles aux directions, partout les mêmes, qu'affectent les forces principales lorsqu'un des modes déjà étudiés d'équilibre stable est supposé réalisé, et appelons $\rho g F_1^0$, $\rho g F_2^0$ ces forces au point (x', y'), $-\rho g p_0$ leur demi-somme, φ' l'inclinaison maxima et constante, dans ce même mode d'équilibre, des pressions sur le prolongement de la normale aux éléments plans qu'elles sollicitent, inclinaison résultant, comme on a vu avant la formule (67bis) [pp. 55 et 56], de la relation

$$\sin\varphi'=\frac{F_1^0-F_2^0}{2p_0}.$$

Les petites parties complémentaires $\rho g n_1$, $\rho g n_2$, $\rho g t$, qu'il faudra joindre à $\rho g F_1^0$, $\rho g F_2^0$, 0, pour avoir N_1', N_2', T', satisferont évidemment aux équations (102) et, par suite, aux relations (102bis). L'équation indéfinie qui devra servir à la détermination de ϖ se déduira d'ailleurs de la formule (28bis) de la page 31 (où l'on accentuera x, y, N_1, N_2, T) par la substitution des valeurs suivantes et approchées de $\frac{T'}{p}$, $\frac{N_2'-N_1'}{p}$:

$$\frac{T'}{p}=\frac{t}{p_0}=-\frac{1}{p_0}\frac{d^2\varpi}{dx'dy'},\quad \frac{N_2'-N_1'}{2p}\quad \text{ou}\quad \frac{F_1^0-F_2^0+n_1-n_2}{F_1^0+F_2^0+n_1+n_2}$$

$$=\frac{F_1^0-F_2^0}{F_1^0+F_2^0}\left[1+\frac{n_1-n_2}{F_1^0-F_2^0}-\frac{n_1+n_2}{F_1^0+F_2^0}\right]=-\sin\varphi'+\frac{1}{2p_0}\left(\frac{d^2\varpi}{dx'^2}-\frac{d^2\varpi}{dy'^2}\right)-\frac{\sin\varphi'}{2p_0}\left(\frac{d^2\varpi}{dx'^2}+\frac{d^2\varpi}{dy'^2}\right).$$

Pour arriver à une équation abordable, il faut admettre que la fonction ϖ varie d'un point à l'autre beaucoup plus rapidement que $\frac{1}{p_0}$: c'est ce qui arrive à des profondeurs l un peu grandes, où p_0 est considérable (de l'ordre de l), et où les dérivées de $\frac{1}{p_0}$ sont de l'ordre de $\frac{1}{p_0^2}$. Alors le coefficient $\frac{1}{p_0}$, dans les formules précédentes, peut être supposé constant, et la relation (28bis), multipliée par $2p_0$, prend la forme homogène

$$0=\left[\frac{d^4\varpi}{dx'^4}+2\frac{d^4\varpi}{dx'^2dy'^2}+\frac{d^4\varpi}{dy'^4}\right]-\sin\varphi'.\left[\frac{d^4\varpi}{dx'^4}-\frac{d^4\varpi}{dy'^4}\right].$$

Elle a pour intégrale générale, avec quatre fonctions arbitraires F_1, F_2, F_3, F_4,

$$\varpi=F_1\left[x'-y'\,\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi'}{2}\right)\sqrt{-1}\right]+F_2\left[x'+y'\,\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi'}{2}\right)\sqrt{-1}\right]+F_3\left[x'+y'\sqrt{-1}\right]+F_4\left[x'-y'\sqrt{-1}\right];$$

ces fonctions peuvent être remplacées par une double infinité de termes, pris, les uns, de la forme $e^{my'\,\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi'}{2}\right)}(A\cos mx'+B\sin mx')$, les autres, de la forme $e^{my'}(C\cos mx'+D\sin mx')$, m, A, B, C, D désignant des constantes quelconques.

Il me paraît difficile d'en tirer quelque résultat intéressant pour la pratique.

Digitized by Google

en désignant simplement par f''_1, f''_2 les dérivées secondes des deux fonctions f_1, f_2, qui paraissent dans (104).

Substituons actuellement dans les formules (100) les valeurs (105) de n_1, n_2, t. Tenons compte d'ailleurs de la proportion multiple

$$(106)\quad \frac{\cos\psi}{\cos(\omega+\psi)(1+\sin\varphi)}=\frac{\sin\psi}{\sin(\omega+\psi)(1-\sin\varphi)}=\frac{\cos\psi(1-\sin\varphi)}{\cos(\omega+\psi)\cos^2\varphi}=\frac{\sin(\omega+2\psi)}{\sin 2(\omega+\psi)},$$

dont le second et le troisième rapports sont égaux au premier, l'un en vertu de l'équation $\sin\omega - \sin(\omega+2\psi)\sin\varphi = 0$, l'autre identiquement, et dont le quatrième résulte de l'addition, terme à terme, des deux premiers après avoir multiplié les termes du premier par $\sin(\omega+\psi)$ et ceux du second par $\cos(\omega+\psi)$. Il viendra simplement :

$$(107)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{N'_1}{\rho g} &= -\frac{\sin(\omega+2\psi)}{\sin 2(\omega+\psi)}(1-\sin\varphi)(l-f''_1-f''_2),\\ \frac{N'_2}{\rho g} &= -\frac{\sin(\omega+2\psi)}{\sin 2(\omega+\psi)}(1+\sin\varphi)(l-f''_1-f''_2),\\ \frac{T'}{\rho g} &= \frac{\sin(\omega+2\psi)}{\sin 2(\omega+\psi)}\cos\varphi\,.(f''_1-f''_2). \end{aligned}\right.$$

Telles sont les formules générales de la solution cherchée. Elles vérifient exactement les deux équations indéfinies (101) de l'équilibre et d'une manière approchée la suivante (101bis), exprimant que l'inclinaison maxima φ' d'une pression sur le prolongement de la normale à l'élément plan qu'elle sollicite atteint en chaque point la valeur φ. En réalité, les relations (107) donnent pour le sinus de l'inclinaison maxima φ',

$$(108)\quad \sin\varphi'=\sqrt{\frac{4T'^2+(N'_1-N'_2)^2}{(N'_1+N'_2)^2}}=\sin\varphi\,.\sqrt{1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\varphi}\left(\frac{f''_1-f''_2}{l-f''_1-f''_2}\right)^2}.$$

La solution obtenue (107) *serait donc exacte, si la masse pulvérulente, se trouvant légèrement hétérogène, avait en chaque point un angle de terre coulante, φ', supérieur à φ d'une quantité variable du second ordre de petitesse, et donné par la relation*

$$\frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi}=\sqrt{1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\varphi}\left(\frac{f''_1-f''_2}{l-f''_1-f''_2}\right)^2}=\text{sensiblement }1+\frac{1}{2\operatorname{tg}^2\varphi}\left(\frac{f''_1-f''_2}{l-f''_1-f''_2}\right)^2:$$

Digitized by Google

on ne pourra ainsi l'admettre, dans le cas d'un massif homogène, qu'autant que le rapport

$$(109) \quad \dots\dots\dots\dots \quad \frac{f_1'' - f_2''}{l - f_1'' - f_2''}$$

sera partout assez petit devant l'unité, abstraction faite de certaines régions très-délimitées ou tout exceptionnelles, dont il serait permis de négliger l'influence sur le reste.

Observons que, dans les formules (107), la fonction

$$f_1'', \quad \text{ou} \quad f_1''\left[x' - y' \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right],$$

a la même valeur le long de toute parallèle à la droite OQ et varie seulement d'une de ces parallèles à ses voisines, que, de même, la fonction

$$f_2'', \quad \text{ou} \quad f_2''\left[x' + y' \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right],$$

a la même valeur le long de toute parallèle à OQ'.

46*bis*. Cherchons actuellement les expressions auxquelles ces relations (107) conduisent pour les deux composantes, normale $-\mathfrak{N}$ et tangentielle $\mathfrak{T}$, de la pression exercée sur un élément plan quelconque parallèle à l'axe des z. J'appellerai encore ε_1 l'inclinaison de cet élément plan sur la verticale, de manière à avoir $-(\varepsilon_1 + \psi)$ pour l'angle β fait par sa normale avec l'axe des x'. Les formules générales (30), appliquées en y accentuant N_1, N_2, T, substituant alors à N_1', N_2', T' leurs valeurs tirées de (107), puis multipliant les résultats, en vue de simplifier les seconds membres, par $\frac{\sin 2(\omega + \psi)}{\sin(\omega + 2\psi)}$, donnent : Formules diverses, relatives aux pressions.

$$(110) \left\{ \begin{aligned} \frac{\mathfrak{T}}{\rho g}\frac{\sin 2(\omega+\psi)}{\sin(\omega+2\psi)} &= [l - f_1'' - f_2''] \sin\varphi \sin 2(\varepsilon_1 + \psi) + (f_1'' - f_2'') \cos\varphi \cos 2(\varepsilon_1 + \psi), \\ \frac{-\mathfrak{N}}{\rho g}\frac{\sin 2(\omega+\psi)}{\sin(\omega+2\psi)} &= [l - f_1'' - f_2''][1 - \sin\varphi \cos 2(\varepsilon_1 + \psi)] + (f_1'' - f_2'') \cos\varphi \sin 2(\varepsilon_1 + \psi). \end{aligned} \right.$$

Il sera généralement préférable, au lieu de calculer $-\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{T}$, d'évaluer



d'abord l'inclinaison φ_1 de la pression sur le prolongement de la normale à l'élément plan, puis de déduire la pression résultante, $\mathfrak{R}$, de l'égalité $\mathfrak{R}=\frac{\mathfrak{T}}{\sin\varphi_1}$, ou

$$(111)\quad \frac{\mathfrak{R}}{\rho g}=\frac{\sin(\omega+2\psi)}{\sin 2(\omega+\psi)}\,\frac{(l-f_1''-f_2'')\sin\varphi\sin 2(\varepsilon_1+\psi)+(f_1''-f_2'')\cos\varphi\cos 2(\varepsilon_1+\psi)}{\sin\varphi_1}.$$

On aura l'inclinaison φ_1 $\left(\text{variable au plus de } -\frac{\pi}{2} \text{ à } \frac{\pi}{2}\right)$ au moyen de sa tangente, qui vaut le rapport des deux seconds membres des formules (110). En exprimant que ces deux seconds membres sont, en effet, entre eux comme $\sin\varphi_1$ est à $\cos\varphi_1$, puis égalant le produit des extrêmes au produit des moyens et simplifiant les résultats, il vient

$$(112)\quad [l-f_1''-f_2'']\,[\sin\varphi_1-\sin\varphi\sin(2\varepsilon_1+2\psi+\varphi_1)]=(f_1''-f_2'')\cos\varphi\cos(2\varepsilon_1+2\psi+\varphi_1).$$

Cette relation permet de simplifier beaucoup la formule (111). Tirons effectivement $f_1''-f_2''$ de (112) et substituons-en la valeur dans (111) : l'expression

$$(l-f_1''-f_2'')\sin\varphi\sin 2(\varepsilon_1+\psi)+(f_1''-f_2'')\cos\varphi\cos 2(\varepsilon_1+\psi)$$

deviendra le produit de $\frac{l-f_1''-f_2''}{\cos(2\varepsilon_1+2\psi+\varphi_1)}$ par

$$\begin{aligned}\sin\varphi\,[\sin 2(\varepsilon_1+\psi)\cos(2\varepsilon_1+2\psi+\varphi_1)-\cos 2(\varepsilon_1+\psi)\sin(2\varepsilon_1+2\psi+\varphi_1)]&\\ +\sin\varphi_1\cos 2(\varepsilon_1+\psi)=\sin\varphi_1\,[\cos 2(\varepsilon_1+\psi)-\sin\varphi]&,\end{aligned}$$

et la formule (111) se réduira d'abord à

$$(113)\quad \ldots\ldots\quad \frac{\mathfrak{R}}{\rho g}=\frac{\sin(\omega+2\psi)}{\sin 2(\omega+\psi)}\,\frac{\cos 2(\varepsilon_1+\psi)-\sin\varphi}{\cos(2\varepsilon_1+2\psi+\varphi_1)}(l-f_1''-f_2'').$$

Elle se simplifie encore si l'on pose

$$(114)\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\quad \delta=\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}-\psi-\varepsilon_1,$$

c'est-à-dire si l'on appelle δ l'inclinaison, sur la direction OQ, de l'élément

Digitized by Google

plan considéré, inclinaison comptée positivement en tournant de OQ vers Oy', négativement dans le sens contraire. Alors la fraction

$$\frac{\cos 2(\varepsilon_1+\psi)-\sin\varphi}{\cos(2\varepsilon_1+2\psi+\varphi_1)} \quad \text{ou} \quad \frac{\sin(\varphi+2\delta)-\sin\varphi}{\sin(\varphi-\varphi_1+2\delta)} \quad \text{devient} \quad \frac{2\cos(\varphi+\delta)\sin\delta}{\sin(\varphi-\varphi_1+2\delta)}.$$

D'autre part, d'après (106), le rapport $\frac{\sin(\omega+2\psi)}{\sin 2(\omega+\psi)}$ peut être remplacé par $\frac{\cos\psi}{(1+\sin\varphi)\cos(\omega+\psi)}$, ce qui donne, au lieu de (113),

$$(115) \quad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{R}}{\rho g} = \dfrac{2\cos\psi\cos(\varphi+\delta)\sin\delta}{(1+\sin\varphi)\cos(\omega+\psi)\sin(\varphi-\varphi_1+2\delta)}(l-f_1''-f_2'') \\ \quad = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\varphi}{2}\right)\dfrac{\cos\psi\cos(\varphi+\delta)\sin\delta}{\cos(\omega+\psi)}\cdot\dfrac{2(l-f_1''-f_2'')}{\cos\varphi\sin(\varphi-\varphi_1+2\delta)}. \end{cases}$$

On pourrait encore y remplacer le facteur $\frac{1}{\cos(\omega+\psi)}$ par l'expression $\frac{\cos(\omega-\varepsilon_1)}{\cos(\omega+\psi)}\frac{1}{\cos(\omega-\varepsilon_1)}$ et éliminer ω du rapport $\frac{\cos(\omega-\varepsilon_1)}{\cos(\omega+\psi)}$, comme on l'a fait pour la formule (98), au moyen de la proportion (98bis). Celle-ci donne

$$\frac{\cos(\omega-\varepsilon_1)}{\cos(\omega+\psi)} \quad \text{ou} \quad \frac{\cos\omega\cos\varepsilon_1+\sin\omega\sin\varepsilon_1}{\cos\omega\cos\psi-\sin\omega\sin\psi} = \frac{\cos\varepsilon_1-\sin\varphi\cos(2\psi+\varepsilon_1)}{(1-\sin\varphi)\cos\psi};$$

on a d'ailleurs, d'après (114),

$$2\psi+\varepsilon_1 = \frac{\pi}{2}-(\varphi+2\delta+\varepsilon_1),$$

et par suite

$$\begin{aligned} &\cos\varepsilon_1-\sin\varphi\cos(2\psi+\varepsilon_1) = \cos[(\varphi+\delta+\varepsilon_1)-(\varphi+\delta)]-\sin\varphi\sin[(\varphi+\delta+\varepsilon_1)+\delta] \\ &= \cos(\varphi+\delta)\cos(\varphi+\delta+\varepsilon_1)+(\sin\varphi\cos\delta+\cos\varphi\sin\delta)\sin(\varphi+\delta+\varepsilon_1) \\ &-\sin\varphi\cos\delta\sin(\varphi+\delta+\varepsilon_1)-\sin\varphi\sin\delta\cos(\varphi+\delta+\varepsilon_1) \\ &= \cos(\varphi+\delta)\cos(\varphi+\delta+\varepsilon_1)+\sin\delta\sin(\delta+\varepsilon_1). \end{aligned}$$

Donc la formule (115) se transforme en celle-ci

$$(116) \quad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{R}}{\rho g} = \dfrac{\sin\delta\cos^2(\varphi+\delta)\cos(\varphi+\varepsilon_1+\delta)}{\cos\varphi}\left[1+\dfrac{\sin\delta\sin(\varepsilon_1+\delta)}{\cos(\varphi+\delta)\cos(\varphi+\varepsilon_1+\delta)}\right] \\ \qquad\qquad \dfrac{2(l-f_1''-f_2'')}{\cos\varphi\sin(\varphi-\varphi_1+2\delta)\cos(\omega-\varepsilon_1)}. \end{cases}$$

Digitized by Google

Les relations (115) ou (116) permettront de calculer $\mathfrak{R}$ aux points pour lesquels les valeurs des trois fonctions l, f_1'', f_2'' seront données. Mais il suffit de connaître deux de ces fonctions, et aussi φ_1, pour que la troisième en résulte et puisse être éliminée par la formule (112). A cause de $2(\varepsilon_1 + \psi) = \frac{\pi}{2} - (\varphi + 2\delta)$, celle-ci peut s'écrire

$$[l - f_1'' - f_2''] [\sin \varphi_1 - \sin \varphi \cos (\varphi - \varphi_1 + 2\delta)] = (f_1'' - f_2'') \cos \varphi \sin (\varphi - \varphi_1 + 2\delta),$$

ou bien, sous forme de proportion,

$$\frac{l - f_1'' - f_2''}{\cos \varphi \sin (\varphi - \varphi_1 + 2\delta)} = \frac{f_1'' - f_2''}{\sin \varphi_1 - \sin \varphi \cos (\varphi - \varphi_1 + 2\delta)}.$$

Ajoutons, terme à terme, les numérateurs et les dénominateurs, après avoir multiplié les deux termes du second rapport par ± 1; il viendra les deux nouveaux rapports, égaux aux premiers,

$$\frac{l - 2f_2''}{\sin \varphi_1 - \sin (\varphi_1 - 2\delta)} = \frac{l - 2f_2''}{2 \cos (\varphi_1 - \delta) \sin \delta},$$

et

$$\frac{l - 2f_1''}{\sin (2\varphi - \varphi_1 + 2\delta) - \sin \varphi_1} = \frac{l - 2f_1''}{2 \cos (\varphi + \delta) \sin (\varphi - \varphi_1 + \delta)}.$$

L'équation (112) équivaut donc à l'égalité continue

$$(117) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{2(l - f_1'' - f_2'')}{\cos \varphi \sin (\varphi - \varphi_1 + 2\delta)} = \frac{2(f_1'' - f_2'')}{\sin \varphi_1 - \sin \varphi \cos (\varphi - \varphi_1 + 2\delta)} \\ & = \frac{l - 2f_2''}{\cos (\varphi_1 - \delta) \sin \delta} = \frac{l - 2f_1''}{\cos (\varphi + \delta) \sin (\varphi - \varphi_1 + \delta)}, \end{aligned} \right.$$

et l'on voit qu'il suffit de connaître, outre φ_1, une quelconque des quantités $l - f_1'' - f_2''$, $f_1'' - f_2''$, $l - 2f_2''$, $l - 2f_1''$, pour en déduire toutes les autres. Comme, dans chaque cas, deux au moins des trois fonctions l, f_1'', f_2'' seront données, on remplacera, dans (115) ou (116), le premier rapport (117) par celui des rapports suivants qui contiendra les deux fonctions connues. Supposons, par exemple, que celles-ci soient l et f_2'' : alors la sub-

Digitized by Google

stitution du troisième rapport (117) au premier change les deux formules (115) et (116) en celle-ci :

$$(118)\left\{\begin{aligned}&\frac{\mathfrak{R}}{\rho g}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\frac{\cos\psi\cos(\varphi+\delta)}{\cos(\omega+\psi)\cos(\varphi_1-\delta)}(l-2f''_2)\\&=\frac{\cos^2(\varphi+\delta)\cos(\varphi+\varepsilon_1+\delta}{\cos\varphi\cos(\varphi_1-\delta)}\left[1+\frac{\sin\delta\sin(\varepsilon_1+\delta)}{\cos(\varphi+\delta)\cos(\varphi+\varepsilon_1+\delta)}\right]\frac{l-2f''_2}{\cos(\omega-\varepsilon_1)}.\end{aligned}\right.$$

47. Tous les résultats précédents ont été déduits des équations indéfinies de l'équilibre et subsistent quelles que soient les deux fonctions arbitraires f''_1, f''_2. Il reste actuellement à déterminer ces fonctions de manière à satisfaire aux conditions spéciales à la surface libre et à celle qui concerne la surface de séparation du mur et du massif. Mise en compte des conditions spéciales aux surfaces-limites. — Circonstances qui se présentent près des murs de soutènement.

Pour cela, observons d'abord que le profil OA du talus supérieur (fig. 5, p. 112) est dans l'angle QOQ'. Évaluons en effet les trois angles GOQ', GOA, GOQ. Le premier vaut y'OQ', ou $\pi-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)$, diminué de ψ. Le second est égal à $\frac{\pi}{2}+\omega$. Enfin, le troisième vaut $\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}-\psi$. On a donc identiquement

$$\text{GOQ}'=\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)+\frac{1}{2}(\varphi-\omega)+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\omega-2\psi\right),\quad \text{GOA}=\frac{\pi}{2}+\omega,$$
$$\text{GOQ}=\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)-\frac{1}{2}(\varphi+\omega)-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\omega+2\psi\right);$$

d'où il résulte, à cause des deux inégalités

$$\omega<\varphi,\quad \omega+2\psi<\frac{\pi}{2},\quad \text{(en valeur absolue)},$$

que GOA est moindre que GOQ' et supérieur à GOQ, ou que OA est compris entre OQ et OQ'.

Cela posé, les conditions à la surface libre, (95), devenues, dans le nouveau système d'axes,

$$N'_1=0,\quad N'_2=0,\quad T'=0\quad \text{(pour } l=0\text{, ou sur OA)},$$

Digitized by Google

reviennent à dire, d'après les valeurs (107) de N'_1, N'_2, T', que l'on a :

$$\text{(en tous les points de OA)} \quad f''_1 + f''_2 = 0, \quad f''_1 - f''_2 = 0, \quad \text{ou} \quad f''_1 = 0, \quad f''_2 = 0.$$

Ainsi la fonction f''_1, qui a la même valeur sur toute l'étendue d'une parallèle quelconque à OQ, doit s'annuler en tous les points de OA et par suite dans tout l'espace qui est du même côté de OQ que le talus supérieur OA, c'est-à-dire notamment dans toute la partie AOQ du massif. De même, la dérivée f''_2, invariable le long de toute parallèle à OQ', doit s'annuler en tous les points de OA et par conséquent dans tout l'espace qui est, par rapport à OQ', du même côté que le talus supérieur OA. Le mur de soutènement se trouvera toujours dans cet espace, qui comprend par conséquent la totalité du massif. *Les conditions spéciales à la surface libre obligent donc de faire nulles, dans toute la partie* AOQ *du massif, les deux fonctions* f''_1, f''_2, *ou, ce qui revient au même, les petites parties complémentaires* $\rho g n_1$, $\rho g n_2$, $\rho g t$, *des forces* N'_1, N'_2, T' : *elles obligent de plus à supposer nulle, dans tout le reste du massif, la fonction* f''_2.

Occupons-nous enfin de la condition spéciale à la paroi. Il pourra se faire : 1° ou bien que la face postérieure du mur tombe dans l'angle AOQ, c'est-à-dire ait une inclinaison i, sur la verticale, supérieure à $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \psi$; 2° ou bien, que la même face ait, au contraire, une inclinaison i moindre que $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \psi$, et tombe, par rapport à OQ, du même côté que Oy'.

Dans le premier cas, les termes complémentaires étant forcément nuls en tous les points du massif, il est impossible de satisfaire à la condition spéciale au mur de soutènement pour peu que l'angle du frottement extérieur diffère de celui, φ_1, qui résulte de la quatrième formule (96). La solution particulière donnée par Macquorn-Rankine est donc alors une solution isolée, ou qui ne se trouve voisine d'aucune autre. Ce résultat tend à prouver que, lorsque un mur rugueux de soutènement, ayant sa face postérieure inclinée sur la verticale d'un angle supérieur à $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \psi$, *commence* à se renverser, l'état ébouleux ne se produit pas dans toute l'étendue du massif. Sans doute *un coin de terre, ayant sa base vers en haut, fait corps avec le mur et se sépare en bloc du reste du massif, suivant un plan de rupture parallèle à* OQ. En effet, deux couches contiguës de terre ne peuvent glisser l'une

Digitized by Google

sur l'autre, de quantités finies, sans que leur pression mutuelle fasse avec la normale à leur surface de séparation un angle égal à celui du frottement intérieur φ : circonstance qui se produit, dans l'état extrême d'équilibre d'élasticité du massif, soit de part et d'autre de plans parallèles à OQ, soit de part et d'autre de plans parallèles à OQ'. Or il est naturel d'admettre que l'état ébouleux, au moment du renversement du mur, s'étend le plus possible, de manière à ne laisser intact, sous la protection du mur, que le coin de terre le plus aigu de ceux qui auraient quelque tendance à subsister : ce coin doit donc être limité par un plan, parallèle à OQ, mené de bas en haut à partir de la base de la face postérieure du mur considéré.

Dans le second cas, soit OM le profil de la face postérieure du mur. La fonction f_1'', encore arbitraire dans l'angle QOM, pourra être déterminée, en chaque point de OM, de manière que l'inclinaison φ_1 de la poussée sur le prolongement de la normale au mur soit précisément égale à l'angle donné du frottement extérieur. A cet effet, appliquons la formule générale (112) ou ses transformées (117), qui déterminent justement les angles appelés φ_1, aux pressions effectivement exercées sur la face postérieure du mur : il faudra y poser $\varepsilon_1 = i$, et par suite

$$(119) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \delta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \psi - i,$$

après avoir fait d'ailleurs $f_2'' = 0$. Le deuxième et le troisième membre de (117) donneront donc, en exprimant complétement f_1'',

$$(120) \quad \ldots \quad \frac{2f_1''\left[x' - y' \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right]}{\sin\varphi_1 - \sin\varphi\cos(\varphi - \varphi_1 + 2\delta)} = \frac{l}{\cos(\varphi_1 - \delta)\sin\delta} \text{ (sur OM)} :$$

telle est la condition spéciale au mur. On en déduira la fonction inconnue f_1'', aux divers points de OM, après avoir mis, pour φ_1, la vraie valeur de l'angle de frottement réciproque du mur et du massif.

Introduisons, au lieu des trois variables x', y', l, la distance L de l'origine O, ou du bord supérieur de la face OM du mur, au point considéré (x', y') de la même face. La distance normale, l, du même point au talus supé-

Digitized by Google

rieur, est la projection de L, prise sous l'angle $\omega - i$, et l'on aura d'abord

$$l = \mathrm{L} \cos(\omega - i).$$

D'autre part, la droite OM fait avec les axes respectifs des x' et des y' les angles $\frac{\pi}{2} - (\psi + i)$ et $\psi + i$: ainsi, sur cette droite, $x' = \mathrm{L} \sin(\psi + i)$, $y' = \mathrm{L}\cos(\psi + i)$, et par suite

$$x' - y' \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\mathrm{L}\sin\left(\psi + i - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} = -\frac{\mathrm{L}\sin\delta}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}.$$

L'équation (120) revient donc à poser, aux divers points de OM, ou quand L est > 0,

$$f_1''\left[-\frac{\mathrm{L}\sin\delta}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}\right] = -\left[\sin\varphi_1 - \sin\varphi\cos(\varphi - \varphi_1 + 2\delta)\right]\frac{\cos(\omega - i)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{2\sin^2\delta\cos(\varphi_1 - \delta)}\cdot\left[\frac{-\mathrm{L}\sin\delta}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}\right].$$

On voit que la fonction f_1'', déjà nulle pour les valeurs positives de sa variable, est simplement, pour les valeurs négatives de celle-ci, le produit de ces valeurs par le facteur constant

$$(121) \quad . \quad . \quad \mathrm{A} = -\frac{\sin\varphi_1 - \sin\varphi\cos(\varphi - \varphi_1 + 2\delta)}{2\sin^2\delta}\,\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\cos(\omega - i)}{\cos(\varphi_1 - \delta)}.$$

La condition spéciale à la surface de séparation du massif et du mur achève ainsi de déterminer l'état dynamique du milieu dans la région QOM, en faisant connaître la valeur de f_1'' en chaque point de OM et par suite sur toute l'étendue de la parallèle menée par ce point à OQ.

Observons que f_1'' s'annule des deux côtés *du plan, ayant pour profil* OQ, *qui sépare les deux parties distinctes du massif dans lesquelles les variations de cette fonction sont régies par des lois différentes.* En d'autres termes, les pressions ne cessent pas de varier avec continuité quand on passe d'une région à l'autre, quoique leurs dérivées, prises suivant des normales à OQ, soient discontinues. C'est ce qui devait avoir lieu; car l'équilibre d'une

Digitized by Google

couche mince de matière ayant le plan OQ pour une de ses bases exige que les deux composantes de la pression exercée de part et d'autre de cette couche soient égales chacune à chacune, conditions qui, jointes à l'équation indéfinie (101bis) et à celle qui exprime que le rapport des deux composantes considérées vaut tang φ, reviennent à dire que N'_1, N'_2, T' ont les mêmes valeurs de part et d'autre de OQ.

Dans la pratique, $\varphi_1 = \varphi$, et la formule (121), à cause de $1 - \cos 2\delta = 2 \sin^2 \delta$, se réduit à

$$A = -\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \sin\varphi}{\cos(\varphi - \delta)} \cos(\omega - i).$$

La relation (120) donne en même temps :

$$(122) \quad . \quad . \text{ (sur OM) } f''_1 = \frac{\sin\varphi \sin\delta}{\cos(\varphi - \delta)} l, \quad l - f''_1 = \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\cos(\varphi - \delta)} l, \quad \frac{f''_1}{l - f''_1} = \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta.$$

Aux divers points d'une parallèle quelconque à OQ, menée dans le massif à partir d'un point de OM, la quantité constante f''_1 est donc positive, ainsi que la différence $l - f''_1$, de plus en plus grande à mesure qu'on s'éloigne le long de cette parallèle. Le rapport $\frac{f''_1}{l - f''_1}$ atteint par suite sa valeur la plus grande au départ, où il est égal à tg φ tg δ, et la formule (108) [dans laquelle on a $f''_2 = 0$], permet de poser :

$$(122^{bis}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi} \begin{cases} > 1, \\ < \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\delta} = \frac{1}{\cos\delta}. \end{cases}$$

Toutes les fois que l'inclinaison positive, δ, de la face postérieure du mur sur la direction OQ, *ne sera pas très-grande* (*ou sera moindre, par exemple, que l'angle* $\frac{\pi}{8} = 22^\circ \frac{1}{2}$, *dont la sécante* $\frac{1}{\cos\delta}$ *vaut seulement* 1,082), *on pourra supposer, sauf erreur négligeable,* $\varphi' = \varphi$, *et regarder la solution approximative comme applicable.*

Occupons-nous actuellement de la pression qu'éprouve l'unité d'aire de la face OM, à la distance $L = \frac{l}{\cos(\omega - i)}$ de son bord supérieur. La relation (118), où l'inclinaison φ_1 de la poussée sur le prolongement de la normale à OM

égalera l'angle connu du frottement mutuel du mur et du massif, la donne immédiatement, si l'on y fait $\varepsilon_1 = i$, $\delta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \psi - i$, et d'ailleurs $f_2'' = 0$. Par suite, les lois de la poussée seront celles que nous avons trouvées au nº 44 (p. 109), à cela près que φ_1 sera différent et que le coefficient numérique $K = \frac{\mathcal{R}}{\rho g L}$ aura la valeur

$$(123)\quad \left\{ \begin{aligned} K &= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \frac{\cos\psi \cos(\varphi + \delta)\cos(\omega - i)}{\cos(\varphi_1 - \delta)\cos(\omega + \psi)} \\ &= \frac{\cos^2(\varphi + \delta)\cos(\varphi + i + \delta)}{\cos\varphi \cos(\varphi_1 - \delta)}\left[1 + \frac{\sin\delta \sin(i + \delta)}{\cos(\varphi + \delta)\cos(\varphi + i + \delta)}\right]. \end{aligned} \right.$$

Cette formule peut tenir lieu : 1° de la plus générale (cinquième 96) que M. Maurice Levy ait obtenue et qui convient lorsque φ_1 a précisément la valeur résultant de la quatrième relation (96); 2° de la formule très-simple (99) donnée par M. Maurice Levy pour le cas où $\varphi_1 = \varphi$ et où $\delta = 0$: en effet, le dernier membre de (123) se réduit bien alors à $\cos(\varphi + i)$. Mais elle s'étend en outre à tous les modes d'équilibre-limite par détente qui sont assez voisins de ceux-là, ou pour lesquels, δ se trouvant d'ailleurs positif, l'angle φ_1 du frottement extérieur n'est pas très-différent de celui qui vérifie la quatrième relation (96).

Appliquons-la au cas particulier le plus simple, qui est celui d'un terre-plein horizontal soutenu par un mur vertical. Alors on a

$$\omega = 0,\quad \psi = 0,\quad i = 0,\quad \delta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2},$$

et par suite

$$(123^{bis})\quad K = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\left[\varphi_1 - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right]} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\left[\varphi_1 - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right]}.$$

Le coefficient K se trouve le même, et égal à $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$, soit quand le mur est supposé infiniment poli, ou que $\varphi_1 = 0$, hypothèse d'accord, pour ω et i nuls, avec la quatrième formule (96), soit quand φ_1 est complémentaire de φ, ou que

$$\varphi + \varphi_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Digitized by Google

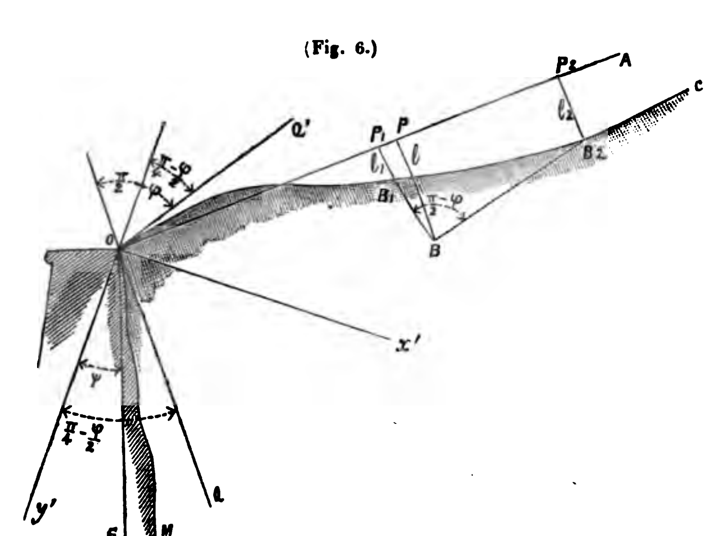
comme il arrive lorsqu'on prend $\varphi = \varphi_1 = 45°$. Les valeurs de φ_1 intermédiaires entre 0 et $\frac{\pi}{2} - \varphi$ donnent des valeurs de K un peu plus petites : la moindre de celles-ci correspond à $\varphi_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$; elle est inférieure à $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$ dans le rapport de 1 à $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$, ou environ de 1 à $\cos 22° \frac{1}{2} = 0{,}9239$ si $\varphi = 45°$.

Étude de cas où les profils du talus supérieur et de la face postérieure du mur sont courbes.

48. Les résultats établis dans les numéros 46 et 46*bis* peuvent encore être étendus à un massif dont le profil supérieur OB_1B_2C (fig. 6) serait légèrement courbe et que soutiendrait un mur ayant sa face postérieure OM courbe également. Je supposerai qu'on ait pris l'origine des coordonnées x', y' à l'intersection O de cette face et du talus supérieur; de plus, j'admettrai que l'inclinaison variable de ce même talus sur une certaine droite OA reste petite, ou que la déclivité de la surface supérieure du massif ne s'écarte nulle part beaucoup de la constante ω, mesurant la déclivité de OA. Enfin, pour simplifier, je supposerai que le profil de la face postérieure OM du mur se trouve tout entier d'un même côté de la droite OQ, et même qu'il s'éloigne sans cesse de cette droite, à partir du point O, de manière à n'être coupé qu'en un seul point par toute parallèle à OQ.

Considérons un point quelconque B (x', y') du massif et menons à partir de ce point, parallèlement aux deux directions fixes QO, OQ′, les deux droites BB_1, BB_2, jusqu'à la limite du massif. Si le point B est dans la région QOC, les extrémités B_1, B_2 se trouveront évidemment sur la surface libre OC, et on pourra mener, des trois points B, B_1, B_2, sur la droite OA prolongée indéfiniment dans les deux sens, les perpendiculaires BP, B_1P_1, B_2P_2, que

(Fig. 6.)



j'appellerai respectivement l, l_1, l_2 : ces perpendiculaires seront évaluables pour chaque position du point B, soit graphiquement, soit analytiquement en fonction de x', y', dès qu'on aura donné le profil supérieur OC et par suite une droite OA peu inclinée sur ce profil; je les compterai d'ailleurs positivement au-dessous de OA, négativement au-dessus. Si, au contraire, le point B est dans la région comprise entre OQ et le prolongement de Q'O, ce qui ne peut arriver que dans le cas où le mur OM est en dehors de l'angle QOQ', B_2 sera toujours situé sur la surface libre OC, mais B_1 se trouvera sur le profil OM du mur : alors il n'y aura lieu de mener sur OA que les deux perpendiculaires l, l_2. Remarquons que, dans tous les cas, les deux différences $l - l_1$, $l - l_2$ sont positives, car, OA étant dans l'angle QOQ', les points B_1, B_2 se trouvent au-dessus d'une parallèle menée à OA par le point B.

Voyons maintenant comment l'indétermination des deux fonctions arbitraires f_1'', f_2'' permettra d'adapter au problème actuel les intégrales (107) des équations indéfinies. Tâchons de satisfaire d'abord aux conditions spéciales à la surface libre, en exprimant que N_1', N_2', T' s'annulent dès que le point B appartient à la courbe OC. D'après les formules (107), il faut et il suffit, pour cela, qu'on ait :

$$\text{(sur OC)},\quad l - f_1'' - f_2'' = 0,\quad f_1'' - f_2'' = 0,\quad \text{ou}\quad f_1'' = f_2'' = \frac{1}{2}\,l.$$

Les deux fonctions f_1'', f_2'' se trouvent ainsi déterminées sur le talus supérieur et, comme elles ont les mêmes valeurs le long de toute parallèle menée respectivement à OQ ou à OQ', elles le sont, par le fait même, la première dans toute la région QOC, la seconde dans toute l'étendue du massif. Au point quelconque B, on a donc

$$(124)\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\quad f_2'' = \frac{1}{2}\,l_2,$$

et on a aussi, mais seulement quand ce point appartient à la région QOC,

$$(125)\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\quad f_1'' = \frac{1}{2}\,l_1 \text{ (dans la région QOC)}.$$

La solution obtenue n'étant admissible, pour un massif homogène, qu'au-

Digitized by Google

tant que le rapport (109) [p. 117] est une petite quantité, il y a lieu d'examiner si les expressions (125) et (124) de f_1'', f_2'', donnent en effet de petites valeurs à ce rapport, devenu ainsi

$$(125^{bis}) \quad \dots\dots\dots\dots \quad \frac{\frac{1}{2}(l_1 - l_2)}{l - \frac{1}{2}(l_1 + l_2)}.$$

Or, le profil B_1B_2C étant supposé peu incliné sur OA, le dénominateur de (125bis) est toujours comparable, sinon même sensiblement égal, à la distance du point considéré B au talus supérieur, tandis que le numérateur de (125bis) est de l'ordre du produit de la petite inclinaison de B_1B_2 sur OA par la droite P_1P_2, laquelle est comparable à la distance, dont il vient d'être parlé, du point B au talus supérieur. Donc la solution est bien acceptable tant que les inclinaisons, sur l'horizon, des diverses parties du talus supérieur ne diffèrent pas beaucoup d'une constante ω.

En résumé, le mode d'équilibre, dans la région principale QOC, est complétement déterminé par les équations indéfinies et par les conditions spéciales à la surface libre. Par suite, si la face postérieure OM du mur de soutènement se trouve comprise dans cette région, on ne pourra satisfaire à la condition qui lui est relative qu'autant que la pression exercée sur chacun de ses éléments plans, d'après les formules (110), fera précisément, avec le prolongement de la normale correspondante, un angle φ_1 égal à celui du frottement extérieur donné. C'est dire qu'en général un coin de terre adjacent au mur ne pourra pas s'ébouler, et qu'il y aura rupture, avec glissement fini, entre ce coin de terre et le reste du massif. La surface de rupture devant être le lieu géométrique d'éléments plans sur lesquels l'angle de la pression et de la normale atteint la valeur maxima φ (ou plus exactement φ'), son profil se construira de proche en proche en menant, à la suite les unes des autres et à partir de la base de la face OM, une série de droites infiniment petites dont l'inclinaison ε_1 par rapport à la verticale sera telle, en chaque point, que les formules (110) y donnent $\frac{\mathfrak{T}}{-\mathfrak{N}} = \operatorname{tg} \varphi'$. La direction des tangentes à la courbe ainsi obtenue ne s'écartera généralement pas beaucoup

Digitized by Google

de celle de OQ. On pourra, dans le calcul des dimensions d'un mur capable de supporter, sans achever de se renverser, la poussée-limite qu'il éprouve au moment où l'état du massif devient ébouleux, regarder comme faisant corps avec le mur lui-même le coin de terre adjacent que son frottement maintient à l'état élastique, ou raisonner comme si la surface de rupture était la vraie face postérieure de ce mur.

Passons actuellement au cas où le massif comprend, outre la région QOC, une autre petite région QOM, dans laquelle la fonction f_1'', constante le long de toute parallèle à OQ, sera restée disponible. On pourra y déterminer f_1'' de manière que l'inclinaison φ_1 de la poussée exercée sur les divers éléments plans de la face OM, par rapport à la normale à ces éléments plans, vaille précisément l'angle donné du frottement extérieur. Pour cela, si φ_1 désigne cet angle, i l'inclinaison, au point considéré, de OM sur la verticale, et par suite δ son inclinaison, $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \psi - i$, sur OQ, il suffit, d'après le deuxième et le troisième membre de (117), que

$$(126) \quad \ldots \quad f_1'' - f_2'' = \frac{\sin\varphi_1 - \sin\varphi\cos(\varphi - \varphi_1 + 2\delta)}{2\cos(\varphi_1 - \delta)\sin\delta}(l - 2f_2'') \text{ (sur OM).}$$

Or, d'après (124), $2f_2'' = l_2$, et, d'autre part, dans la pratique, $\varphi_1 = \varphi$, ce qui réduit l'expression $\sin\varphi_1 - \sin\varphi\cos(\varphi - \varphi_1 + 2\delta)$ à $2\sin\varphi\sin^2\delta$. La formule précédente devient donc

$$(127) \quad \ldots\ldots \quad f_1'' = \frac{1}{2}l_2 + \frac{\sin\varphi\sin\delta}{\cos(\varphi - \delta)}(l - l_2) \text{ (sur OM).}$$

Connaissant f_1'' aux divers points B_1 de OM, on aura par le fait même cette fonction aux points correspondants B de la région QOM, dont l'état mécanique, régi par d'autres lois que celui de la région QOC, sera ainsi complétement déterminé. On pourrait encore prolonger en deça du point O la droite OA et aussi, *fictivement,* le profil du talus supérieur, en maintenant, entre ce dernier prolongement d'une part, au point il rencontrerait une parallèle quelconque à OQ, et, d'autre part, le prolongement de OA, une distance l_1 double de la valeur (127) qu'acquiert la fonction f_1'' à l'intersec-

Digitized by Google

tion de cette parallèle et de OM. Il est clair que la partie fictive ainsi ajoutée au massif en avant de OM produirait, sur le massif réel MOC, le même effet que le mur de soutènement; le problème de l'équilibre-limite d'un massif limité par un mur se trouverait donc ramené à celui de l'équilibre-limite d'un massif latéralement indéfini. Observons que son profil supérieur présenterait en général, à l'origine O, un point anguleux, et que par suite la dérivée de f''_1, ou celles des forces N'_1, N'_2, T', dans un sens normal à OQ, prendraient des valeurs différentes des deux côtés de cette droite, quoique la fonction f''_1 et ces forces elles-mêmes y restent continues.

En observant que $f''_2 = \frac{1}{2} l_2$, la relation (127) donne

$$(128)\ (\text{sur OM}),\ f''_1 - f''_2 = \frac{\sin\varphi \sin\delta}{\cos(\varphi - \delta)}(l - l_2),\ l - f''_1 - f''_2 = \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\cos(\varphi - \delta)}(l - l_2),\ \frac{f''_1 - f''_2}{l - f''_1 - f''_2} = \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta.$$

D'après ces formules, les deux expressions $f''_1 - f''_2$ et $l - f''_1 - f''_2$ sont positives, comme $l - l_2$, aux divers points de OM. Le long d'une parallèle menée à OQ, dans le massif réel, à partir d'un point de OM, la quantité croissante l varie d'ailleurs beaucoup plus rapidement que la fonction $f''_2 = \frac{1}{2} l_2$, dont les accroissements sont proportionnels au produit de quantités comparables à ceux de l, multipliées par la petite inclinaison de la courbe B_2C sur OA : donc la valeur la plus grande que reçoive en même temps le rapport $\frac{f''_1 - f''_2}{l - f''_1 - f''_2}$ doit être en général sa valeur initiale $\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta$. Quand il en est ainsi, la formule (108) donne, comme au numéro précédent (form. 122[bis]),

$$(129) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi} \begin{cases} > 1 \\ < \dfrac{1}{\cos\delta}; \end{cases}$$

ce qui signifie que la solution trouvée pourra être admise toutes les fois que l'inclinaison positive δ, sur la direction OQ, des diverses parties de la face postérieure du mur aura son cosinus assez voisin de l'unité, ou n'excédera pas, par exemple, $\frac{\pi}{8} = 22°\frac{1}{2}$. La conclusion serait la même s'il y avait des points où le numérateur $f''_1 - f''_2$ crût, le long d'une parallèle à OQ, dans une proportion aussi rapide que le dénominateur $l - f''_1 - f''_2$: le rap-

Digitized by Google

port $\frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi}$ ne cesserait pas alors d'être peu supérieur à l'unité, car la fraction $\frac{f''_1 - f'_1}{1 - f''_1 - f'_1}$ continuerait à être comparable à $\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta$.

Il nous reste à évaluer la pression exercée par le massif sur le mur. On connaît déjà la direction de celle qui est appliquée à un élément plan quelconque de la face OM, puisqu'elle fait, avec le prolongement de la normale à l'élément plan considéré, l'angle connu φ_1 du frottement extérieur. D'ailleurs sa grandeur $\mathcal{R}$, sous l'unité de surface, sera donnée par la formule (118), où il suffira pour cela de remplacer $2 f''_2$ par l_2, ε_1 par l'inclinaison i, sur la verticale, du même élément plan, et par suite δ par $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \psi - i$. Toutes ces poussées élémentaires, étant comprises dans un même plan, équivaudront à une force unique; mais le calcul de celle-ci sera généralement compliqué.

Le résultat ne devient quelque peu simple que dans le cas où la face postérieure du mur est plane et d'un même degré de poli ou de rugosité dans toute son étendue, hypothèses en vertu desquelles toutes les poussées élémentaires sont parallèles et de même sens. Appelons alors dL la largeur d'une bande de cette face; $L = \frac{l}{\cos(\omega - i)}$ la distance des points de cette bande à l'intersection de la face considérée et du talus supérieur; $L_2 = \frac{l_2}{\cos(\omega - i)}$, la distance analogue, mesurée parallèlement à la face postérieure du mur, de chaque point tel que B_2 à la droite OA, distance qui deviendra une fonction connue de L puisque tous les points B seront pris sur OM. La poussée élémentaire $\mathcal{R}dL$, éprouvée par l'unité de longueur de la bande, vaudra

$$\mathcal{R}dL = \rho g \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \frac{\cos\psi \cos(\varphi + \delta)\cos(\omega - i)}{\cos(\varphi_1 - \delta)\cos(\omega + \psi)} (L - L_2)\, dL$$

$$= \rho g \frac{\cos^2(\varphi + \delta)\cos(\varphi + i + \delta)}{\cos\varphi \cos(\varphi_1 - \delta)} \left[1 + \frac{\sin\delta \sin(i + \delta)}{\cos(\varphi + \delta)\cos(\varphi + i + \delta)}\right] (L - L_2)\, dL.$$

La poussée totale par unité de longueur du mur, jusqu'à une distance $\mathcal{L}$ du bord supérieur, aura donc pour expression $\int_0^{\mathcal{L}} \mathcal{R}dL$, ou

$$(130) \quad \ldots\ldots\ldots \quad P = K \frac{\rho g \mathcal{L}^2}{2} \int_0^{\mathcal{L}} \left(1 - \frac{L_2}{L}\right) \frac{2L dL}{\mathcal{L}^2},$$

si l'on appelle toujours K le coefficient constant défini par la formule (123).

Digitized by Google

Quant à la distance, $\mathcal{L}_1$, du point d'application de cette poussée au bord supérieur, elle résultera de l'équation des moments

$$\mathcal{L}_1 P = \int_0^{\mathcal{L}} \mathcal{R} L dL = K \frac{\rho g \mathcal{L}^3}{3} \int_0^{\mathcal{L}} \left(1 - \frac{L_2}{L}\right) \frac{3L^2 dL}{\mathcal{L}^3},$$

et vaudra par conséquent

$$(131) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathcal{L}_1 = \frac{2}{3}\mathcal{L} \frac{\int_0^{\mathcal{L}} \left(1 - \frac{L_2}{L}\right) \frac{3L^2 dL}{\mathcal{L}^3}}{\int_0^{\mathcal{L}} \left(1 - \frac{L_2}{L}\right) \frac{2L dL}{\mathcal{L}^2}}.$$

La détermination de la poussée P et de son point d'application nécessitera donc le calcul de deux intégrales, dont l'évaluation numérique pourra se faire dès que L_2 sera donné en fonction de L, c'est-à-dire dès que le profil exact du talus supérieur sera connu.

Pour $L_2 = 0$, nous retrouvons les résultats déjà obtenus au numéro précédent.

Le cas où la surface supérieure OC est plane et le mur de soutènement OM courbe, paraît être le plus simple après celui que nous venons d'examiner. On peut poser alors, dans la formule générale (118), $f_2'' = 0$; mais les angles i (ou ε_1) et δ ne peuvent plus être supposés constants, circonstance qui doit rendre les calculs peu abordables.

Digitized by Google

§ X (*).

ÉTUDE, EN COORDONNÉES POLAIRES, DE L'ÉQUILIBRE-LIMITE (PAR DÉFORMATIONS PLANES) D'UNE MASSE PLASTIQUE OU PULVÉRULENTE COMPRIMÉE. APPLICATIONS A UNE MASSE ANNULAIRE, A UN MASSIF COMPRIS ENTRE DEUX PLANS RIGIDES QUI SE COUPENT.

Équations de l'équilibre-limite, en coordonnées polaires, quand on fait abstraction de la pesanteur.

49. Les deux équations indéfinies (28) [p. 30], où je suppose que x, y désignent les coordonnées actuelles des diverses molécules, se réduisent à

$$(132) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{dN_1}{dx}+\frac{dT}{dy}=0, \quad \frac{dT}{dx}+\frac{dN_2}{dy}=0,$$

quand les dérivées des forces N, T sont assez grandes pour qu'on puisse négliger en comparaison le poids spécifique ρg du massif. Cherchons ce que deviendront ces équations si chaque point M du plan des xy est défini au moyen de sa distance $OM=r$ à l'origine O et de l'inclinaison θ du rayon vecteur OM sur un axe polaire fixe.

J'appellerai :

α l'angle, compris à la rigueur entre $\mp\frac{\pi}{2}$, que fera avec ce rayon vecteur OM prolongé la force principale la plus petite F_3 (*pression* la plus grande) menée en M, en sorte que $\theta+\alpha$ sera l'inclinaison de celle-ci sur l'axe polaire ;

N_r, T les deux composantes, suivant les directions respectives inclinées de θ, $\theta+\frac{\pi}{2}$ sur l'axe polaire, de la force exercée sur l'élément plan perpendiculaire au rayon OM, du côté de son prolongement ;

N_θ, T les deux composantes, normale et tangentielle, de la force exercée

(*) Paragraphe envoyé à l'Académie postérieurement à la présentation du mémoire.

Digitized by Google

sur l'élément plan mené suivant OM et dont la normale est inclinée sur l'axe polaire de $\theta + \frac{\pi}{2}$.

Généralement, si i désigne l'angle fait, avec la force F_3, par la perpendiculaire à un élément plan normal aux xy, ou $\theta + \alpha + i$ son inclinaison sur l'axe polaire, les formules (32) [p. 32] donneront, pour les deux composantes, normale $\mathfrak{N}$ et tangentielle $\mathfrak{T}$, de la force que supporte cet élément plan,

$$(133) \quad \ldots \ldots \quad \mathfrak{N} = -p - \mathrm{R} \cos 2i, \quad \mathfrak{T} = \mathrm{R} \sin 2i.$$

On aura 1° N_r et T en faisant dans ces formules $i = -\alpha$; 2° N_θ en posant dans la première $i = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Ainsi :

$$(134) \quad \ldots \quad N_r = -p - \mathrm{R} \cos 2\alpha, \quad T = -\mathrm{R} \sin 2\alpha, \quad N_\theta = -p + \mathrm{R} \cos 2\alpha.$$

Cela posé, il est facile de déduire des deux formules (132) deux équations indéfinies d'équilibre où ne paraissent que N_r, N_θ, T et leurs dérivées en r et en θ. Supposons qu'on prenne OM pour axe des x, et un axe des y incliné sur l'axe polaire de $\theta + \frac{\pi}{2}$. Alors, au point M, dont les coordonnées rectangles sont $x = r$, $y = 0$, on a évidemment $\mathrm{N}_1 = N_r$, $\mathrm{T} = T$; et, en outre, $\frac{d\mathrm{N}_1}{dx} = \frac{dN_r}{dr}$, $\frac{d\mathrm{T}}{dx} = \frac{dT}{dr}$, où N_r, T ont les valeurs (134).

Il reste à obtenir $\frac{d\mathrm{T}}{dy}$, $\frac{d\mathrm{N}_2}{dy}$. A cet effet, cherchons les composantes T, N_2 au point qui a les coordonnées rectangles $x = r$, $y = r d\theta$, et les coordonnées polaires r, $\theta + d\theta$. Les formules (133) deviennent évidemment, pour ce point,

$$(135) \quad \ldots \quad \mathfrak{N} = -\left(p + \frac{dp}{d\theta} d\theta\right) - \left(\mathrm{R} + \frac{d\mathrm{R}}{d\theta} d\theta\right) \cos 2i, \quad \mathfrak{T} = \left(\mathrm{R} + \frac{d\mathrm{R}}{d\theta} d\theta\right) \sin 2i.$$

D'ailleurs, le rayon vecteur émané de l'origine y est incliné sur la force principale la plus petite de l'angle $-\left(\alpha + \frac{d\alpha}{d\theta} d\theta\right)$, et une parallèle à l'axe des x fait avec cette force le même angle diminué de $d\theta$. On aura donc, au point $(r, \theta + d\theta)$, la valeur de T, c'est-à-dire $\mathrm{T} + \frac{d\mathrm{T}}{dy} r d\theta$, en posant, dans la seconde (135), $i = -\left[\alpha + \left(1 + \frac{d\alpha}{d\theta}\right) d\theta\right]$; et l'on y obtiendra N_2, ou plutôt $\mathrm{N}_2 + \frac{d\mathrm{N}_2}{dy} r d\theta$, en prenant pour i, dans la première (135), le même

angle augmenté de $\frac{\pi}{2}$. Il vient, sauf infiniment petits négligeables du second ordre :

$$T + \frac{dT}{dy} r d\theta = -\left(R + \frac{dR}{d\theta} d\theta\right) \sin 2\left[\alpha + \left(1 + \frac{d\alpha}{d\theta}\right) d\theta\right]$$
$$= -R \sin 2\alpha - \left[\frac{dR}{d\theta} \sin 2\alpha + 2R\left(1 + \frac{d\alpha}{d\theta}\right) \cos 2\alpha\right] d\theta,$$

$$N_2 + \frac{dN_2}{dy} r d\theta = -\left(p + \frac{dp}{d\theta} d\theta\right) + \left(R + \frac{dR}{d\theta} d\theta\right) \cos 2\left[\alpha + \left(1 + \frac{d\alpha}{d\theta}\right) d\theta\right]$$
$$= -p + R \cos 2\alpha + \left[-\frac{dp}{d\theta} + \frac{dR}{d\theta} \cos 2\alpha - 2R\left(1 + \frac{d\alpha}{d\theta}\right) \sin 2\alpha\right] d\theta.$$

On tire de ces formules $\frac{dT}{dy}, \frac{dN_2}{dy}$ en égalant dans les deux membres les termes affectés de $d\theta$. Enfin, ces valeurs, portées dans (132) ainsi que celles de $\frac{dN_1}{dx}, \frac{dT}{dx}$ trouvées plus haut, donnent les deux équations cherchées :

$$(136) \quad \begin{cases} -\frac{dp}{dr} - \frac{dR}{dr} \cos 2\alpha + 2R \frac{d\alpha}{dr} \sin 2\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{r} \frac{dR}{d\theta} - \frac{2R \cos 2\alpha}{r}\left(1 + \frac{d\alpha}{d\theta}\right) = 0, \\ -\frac{dR}{dr} \sin 2\alpha - 2R \frac{d\alpha}{dr} \cos 2\alpha - \frac{1}{r} \frac{dp}{d\theta} + \frac{\cos 2\alpha}{r} \frac{dR}{d\theta} - \frac{2R \sin 2\alpha}{r}\left(1 + \frac{d\alpha}{d\theta}\right) = 0. \end{cases}$$

En tenant compte des formules (134), on peut les écrire sous la forme connue :

$$(137) \quad \ldots \quad \frac{dN_r}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dT}{d\theta} + \frac{N_r - N_\theta}{r} = 0, \quad \frac{dT}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dN_\theta}{d\theta} + \frac{2T}{r} = 0.$$

Mais les équations (136) sont généralement préférables à celles-ci dans une étude d'équilibre-limite; car la demi-différence, R, des forces principales extrêmes F_1, F_3 en chaque point y est une fonction connue de leur demi-somme $-p$, et il suffit de substituer à R son expression en p pour que les équations (136) contiennent explicitement les deux fonctions inconnues p, α, seules distinctes ou parfaitement caractéristiques du mode de distribution des pressions aux points considérés (r, θ). D'après la formule (68bis) [p. 58], on peut prendre simplement

$$(138) \quad \ldots \ldots \ldots \quad R = K + ap,$$

Digitized by Google

K et a étant deux constantes, toutes les fois qu'il s'agit d'une masse homogène plastique ou pulvérulente : dans ce dernier cas,

$$(138^{bis}) \quad \ldots \ldots \ldots \quad a = \sin \varphi, \quad K = 0,$$

tandis que, pour un corps malléable, on aurait sensiblement

$$(138^{ter}) \quad \ldots \ldots \ldots \quad a = 0, \quad R = K.$$

Si l'on appelle R′ la dérivée $\frac{dR}{dp}$, et qu'on remplace $\frac{dR}{dr}$, $\frac{dR}{d\theta}$ par $R'\frac{dp}{dr}$, $R'\frac{dp}{d\theta}$, les deux équations (136), résolues ensuite par rapport à $\frac{dp}{dr}$, $\frac{dp}{d\theta}$, donnent aisément :

$$(139) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1-R'^2}{R}\dfrac{dp}{dr} = -\dfrac{2}{r}(\cos 2\alpha - R')\left(1+\dfrac{d\alpha}{d\theta}\right) - \dfrac{d\cos 2\alpha}{dr}, \\ \dfrac{1-R'^2}{R}\dfrac{dp}{d\theta} = -2(\sin 2\alpha)\left(1+\dfrac{d\alpha}{d\theta}\right) - 2r(\cos 2\alpha + R')\dfrac{d\alpha}{dr}. \end{array} \right.$$

Les premiers membres de celles-ci sont les deux dérivées respectives, par rapport à r et à θ, de la fonction $\int \frac{1-R'^2}{R}dp$: leurs seconds membres devront donc satisfaire à la condition d'intégrabilité qu'on obtient en égalant la dérivée du premier d'entre eux par rapport à θ à celle du deuxième par rapport à r. Quand R′ est une constante ou que R est de la forme (138), cette condition d'intégrabilité ne contient que l'inconnue α : on s'en servira pour déterminer α, et les deux équations (139), respectivement multipliées par dr, $d\theta$, ajoutées et intégrées, donneront ensuite p.

50. Appliquons d'abord les relations précédentes au cas où la masse soumise à des déformations planes l'est de la même manière tout autour de l'axe des z, comme il arriverait pour une masse annulaire cylindrique dont la surface intérieure, de rayon r_0, et la surface extérieure, de rayon r_1, éprouveraient des pressions ayant leurs deux composantes, normale et tangentielle, constantes sur toute l'étendue de chacune. Équilibre-limite d'une masse annulaire.

Alors p, α ne dépendent pas de θ; il en est par suite de même, d'après (134), de N_r, N_θ, T, et la seconde équation (137), multipliée par r^2dr et intégrée, donne

$$(140) \quad \ldots \ldots \quad Tr^2 = \text{une const } c, \quad \text{ou} \quad -R\sin 2\alpha = \frac{c}{r^2}.$$



La constante c se détermine immédiatement quand on connaît la force tangentielle T appliquée à l'unité d'aire de l'une des deux surfaces, intérieure ou extérieure, de l'anneau.

On déduit de (134) et (140)

$$(141) \quad \ldots\ldots \quad N_r - N_\theta \quad \text{ou} \quad -2R\cos 2\alpha = \mp 2\sqrt{R^2 - \frac{c^2}{r^4}}.$$

Le radical prend le signe supérieur — ou le signe inférieur + suivant que N_r est plus petit ou plus grand que N_θ : d'après les équations générales (β) [p. 100], le premier cas se présente quand les lignes matérielles dirigées le long des rayons r se contractent et que par suite les fibres circulaires qui leur sont normales se dilatent, ou quand la matière s'éloigne de l'axe de symétrie ; le second cas se présente, au contraire, quand elle s'en rapproche.

Enfin, la première formule (137) devient

$$(142) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{dN_r}{dr} = \pm\frac{2}{r}\sqrt{R^2 - \frac{c^2}{r^4}};$$

c'est une équation différentielle du premier ordre en p et en r, car N_r y a la valeur $-p - R\cos 2\alpha = -p \mp \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{r^4}}$ et de plus R est une fonction connue de p. Son intégration déterminera p, et par suite N_r, N_θ, en tous les points, pourvu qu'on donne la composante normale $-N_r$ de la pression exercée sur l'une des deux surfaces, intérieure ou extérieure.

On voit que les équations de l'équilibre-limite déterminent parfaitement les pressions exercées en tous les points de l'anneau, si l'on connaît celles que supporte une seule de ses deux surfaces, concave ou convexe.

Dans le cas particulier d'un corps malléable, pour lequel $R = K$, l'équation (142) devient aisément $dp = \mp K \frac{d.Kr^2}{\sqrt{(Kr^2)^2 - c^2}}$, et une intégration immédiate, en appelant p_0 la valeur de p pour $r = r_0$, donne

$$(143) \quad \ldots\ldots\ldots \quad p - p_0 = \pm K \log \frac{Kr_0^2 + \sqrt{K^2 r_0^4 - c^2}}{Kr^2 + \sqrt{K^2 r^4 - c^2}}.$$

Digitized by Google

Quelle que soit l'expression de R, mais si l'on sait que T s'annule sur l'une des deux surfaces, intérieure ou extérieure, la formule (140) se réduit partout à $Tr^2 = c = 0$. Soit alors R' la dérivée de R par rapport à p; la relation (142), multipliée par $\frac{dr}{R}$ et intégrée après y avoir substitué $p \pm R$ à $-N_r$, devient aisément :

$$(144) \quad \int_{p_0}^{p} \frac{1 \pm R'}{R} dp = \pm 2 \log \frac{r_0}{r}.$$

Celle-ci, dans les cas où $R = K + ap$, donne, 1° si a n'est pas nul,

$$(145) \quad \frac{K + ap}{K + ap_0} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{\pm 2a}{1 \pm a}},$$

2° si a s'annule ou que $R = K$,

$$(146) \quad p - p_0 = \mp 2K \log \frac{r}{r_0},$$

formule évidemment comprise dans (143).

Ce dernier cas $a = 0$, particulièrement important à considérer, est celui d'un corps plastique. Appelons alors

$$P_0$$

la pression normale appliquée à l'unité d'aire de la surface intérieure de l'anneau, c'est-à-dire la valeur de $-N_r = p \pm K$ pour $r = r_0$. On aura $p_0 \pm K = P_0$, ou $p = P_0 \mp K + (p - p_0)$, et par suite, vu la valeur (146) de $p - p_0$ et les expressions $p \pm K$, $p \mp K$ de $-N_r$, $-N_\theta$:

$$(147) \quad p = P_0 \mp K\left(1 + 2 \log \frac{r}{r_0}\right), \quad -N_r = P_0 \mp 2K \log \frac{r}{r_0}, \quad -N_\theta = P_0 \mp 2K\left(1 + \log \frac{r}{r_0}\right).$$

Les signes supérieurs correspondent, comme il a été dit, au cas où la matière de l'anneau s'éloigne de l'axe, les signes inférieurs au cas où elle s'en rapproche.

51. Les formules (147), que M. de Saint-Venant avait déjà déduites des équations (137) (*), ne conviennent, en toute rigueur, que pour les défor- Application à la théorie de M. Tresca sur le poinçonnage.

(*) Mémoire du 15 avril 1872, cité ci-dessus p. 103.

Digitized by Google

mations planes dans lesquelles les couches conaxiques ou cylindriques conservent leur hauteur et s'éloignent ou se rapprochent les unes des autres sans cesser d'être normales aux mêmes lignes matérielles. Mais, si l'on admet, comme hypothèse la plus simple possible, que la différence $F_1 - F_3$ des deux forces principales extrêmes est une quantité sensiblement constante 2K pour un corps à l'état plastique, même quand ses déformations ne sont pas planes, et si $-p$ désigne la demi-somme de F_1, F_3, les relations (147) résulteront encore de cette condition $F_1 - F_3 = 2K$ et de l'équation exprimant l'équilibre d'un élément de volume suivant les rayons r, dans toutes les circonstances où la direction des rayons r sera celle d'une des forces principales extrêmes et où les plans méridiens seront des plans de symétrie ne supportant qu'une pression normale, $-N_\theta$, assez peu différente en chaque point de l'autre force principale extrême.

C'est ce qui arrive, en premier lieu, pour un anneau posé sur un plan poli et dont la surface intérieure, de rayon r_0, est soumise par unité d'aire à une pression P_0 qui la distend, tandis que la surface convexe, de rayon r_1, et la base supérieure sont libres. Alors N_θ est la plus grande des forces principales, N_r la plus petite ; parce que les lignes matérielles les plus tendues sont, en exceptant peut-être quelques endroits exceptionnels, les circonférences de rayon r décrites autour de l'axe, tandis que les plus contractées sont les rayons r. Il faut donc prendre les formules (147) avec leurs signes supérieurs, et il vient en particulier, comme condition exprimant que $-N_r$ s'annule pour $r = r_1$,

(148) . . . . $$P_0 = 2K \log \frac{r_1}{r_0}.$$

Le même fait, consistant en ce que N_r, N_θ ne diffèrent pas beaucoup des deux forces principales extrêmes, se produit aussi à peu près, au moins entre certaines limites assez étendues, quand l'anneau, toujours posé sur un plan solide et soumis sur sa surface concave, de rayon r_0, à une pression P_0 par unité d'aire, a sa surface extérieure, de rayon r_1, maintenue invariable au moyen d'une enveloppe rigide et polie qui l'entoure, tandis que la base supérieure supporte une pression totale plus ou moins grande, dont

P_2

désignera le quotient par l'aire $\pi(r_1^2 - r_0^2)$ de cette base. Alors la matière se dilate à la fois ou se contracte à la fois, et en moyenne presque également, dans deux sens rectangulaires normaux aux rayons r, tandis qu'elle éprouve par suite, suivant les rayons r, une contraction ou une dilatation moyennement doubles. On a donc presque $N_z = N_\theta$, c'est-à-dire que les éléments plans parallèles aux bases de l'anneau supportent des tractions N_z (positives ou négatives) assez peu différentes de celles qu'éprouvent, aux mêmes points, les plans méridiens; et la troisième formule (147) donne

$$(149) \quad \ldots\ldots\ldots \quad -N_z \quad \text{ou} \quad -N_\theta = P_0 \mp 2K\left(1 + \log\frac{r}{r_0}\right).$$

D'ailleurs, la condition exprimant l'équilibre, dans le sens de l'axe, de la portion d'anneau comprise entre la base supérieure et une section horizontale quelconque, exige que la pression totale, $\pi(r_1^2 - r_0^2)\,P_z$, supportée par la base considérée, égale la somme, $2\pi\int_{r_0}^{r_1}(-N_z)\,rdr$, des pressions exercées sur la section entière. On a donc

$$\pi(r_1^2 - r_0^2)\,P_z = \int_{r_0}^{r_1}(-N_z)\,2\pi rdr = (P_0 \mp 2K)\,\pi(r_1^2 - r_0^2) \mp K\pi r_0^2\int_{r_0}^{r_1}\frac{d}{dr}\left[\frac{r^2}{r_0^2}\left(-1 + \log\frac{r^2}{r_0^2}\right)\right]dr,$$

et la pression *moyenne* P_z, exercée sur l'unité d'aire d'une base de l'anneau, est représentée par

$$(150) \quad \ldots\ldots\ldots \quad P_z = P_0 \mp K\left(1 + \frac{2r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}\log\frac{r_1}{r_0}\right).$$

Si cette pression moyenne P_z, exercée sur les bases, est assez forte pour écraser l'anneau en faisant décroître son rayon intérieur r_0, on prendra les signes inférieurs, et cette formule donnera

$$(151) \quad \ldots\ldots\ldots \quad P_z = P_0 + K\left(1 + \frac{2r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}\log\frac{r_1}{r_0}\right).$$

Le cas contraire où la base supérieure de l'anneau serait libre peut être aussi, avec quelque approximation, déduit de (150) en posant $P_z = 0$. Supposons en outre que le mouvement dilate alors les circonférences matérielles

Digitized by Google

de rayon r décrites autour de l'axe, ou qu'il faille prendre les signes supérieurs : il viendra

(152) . . . . $$P_0 = K\left(1 + \frac{2r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}\log\frac{r_1}{r_0}\right).$$

Les formules (148), (151), (152) ont été trouvées (tout autrement que ci-dessus) par M. Tresca, créateur de la plasticodynamique, qui les a données dans son Mémoire *Sur le poinçonnage des métaux et la déformation des corps solides* (RECUEIL DES SAVANTS ÉTRANGERS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS, t. XX, 1872, pp. 160 à 222 du mémoire).

Il y considère notamment un bloc cylindrique de plomb ou d'étain de rayon r_1, posé sur un plan rigide et soumis sur le milieu de sa base supérieure à l'action d'un poinçon également cylindrique d'un rayon plus petit r_0; le reste de la base supérieure du bloc est libre, tandis que sa surface latérale est tantôt libre, tantôt rendue horizontalement inextensible au moyen d'un cylindre extérieur rigide qui l'entoure. Un calcul exact de la répartition des pressions à l'intérieur du bloc étant inabordable, M. Tresca suppose, ce qui doit être peu éloigné de la vérité, que le cylindre de matière, de rayon r_0, situé sous le poinçon, éprouve un écrasement uniforme jusqu'à une certaine distance du poinçon, en sorte que la pression exercée par l'unité d'aire de celui-ci se transmette à tous les éléments plans horizontaux de ce cylindre central : par suite, tous les éléments plans verticaux du cylindre central considéré supportent la même pression diminuée de 2K.

Sous l'influence de cette dernière pression, l'anneau de rayon $r_1 - r_0$, qui entoure le cylindre central, se dilate latéralement, et dans les conditions auxquelles répond la formule (148), ou, à peu près, la formule (152), suivant que le bloc poinçonné a sa surface latérale libre ou de rayon invariable. Dans les deux cas, la pression exercée par l'unité d'aire de la base du poinçon vaut à chaque instant $P_0 + 2K$, et la force totale, *mesurable*, F, *qui pousse le poinçon*, a pour valeur $(P_0 + 2K)\pi r_0^2$, c'est-à-dire :

(153) . . . . $$F = 2K\pi r_0^2\left(1 + \log\frac{r_1}{r_0}\right) \text{ (surf. latér. libre)},$$

(153*bis*) . . . . $$F = K\pi r_0^2\left(3 + \frac{2r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}\log\frac{r_1}{r_0}\right) \text{ (surf. lat. inextensible)}.$$

Digitized by Google

Toutefois, quand un orifice de mêmes dimensions transversales que le poinçon est percé, vis-à-vis du poinçon même, dans le plan fixe qui supporte le bloc, il arrive un moment où le cylindre central, alors réduit à une hauteur assez petite h, éprouve moins de résistance à sortir par cet orifice, en glissant le long de la surface intérieure $2\pi r_0 h$ de l'anneau qui l'entoure, qu'à continuer à étendre latéralement celui-ci, et où par suite la pression du poinçon détermine l'expulsion du cylindre central. A ce moment, deux lignes verticales contiguës, prises, suivant un même plan méridien, l'une dans le cylindre central, l'autre dans l'anneau, glissent évidemment l'une devant l'autre plus que deux éléments rectilignes parallèles et voisins ayant toute autre orientation, de manière que leur glissement mutuel est maximum, ainsi, par suite, que la force tangentielle exercée, sur la surface intérieure de l'anneau, parallèlement à ses génératrices. Les formules (32) [p. 32], toujours applicables en un point quelconque d'un milieu, dans le plan qui contient les deux forces principales extrêmes F_1, F_3, pourvu que $-p$ y désigne leur demi-somme $\frac{1}{2}(F_1+F_3)$, montrent que cette force tangentielle maximum vaut leur demi-différence $\frac{1}{2}(F_1-F_3)=R$, c'est-à-dire K lorsqu'il est question d'un corps plastique. La résistance qu'éprouve le cylindre central à sortir par l'orifice en glissant contre l'anneau qui l'entoure est donc le produit de K par la surface de contact $2\pi r_0 h$; et la pression du poinçon surmonte cette résistance, désormais moindre que la résistance à l'écrasement, ou détermine la formation et la sortie de la *débouchure*, dès que le produit $2\pi r_0 h$K cesse de dépasser le second membre de (153) ou (153bis). La débouchure se forme donc à l'instant où la force F, sur le point de décroître, est exprimée tout à la fois, soit par (153) ou (153bis), soit par $2\pi r_0 h$K; et sa hauteur h vaut par suite, respectivement :

(154) . . . . . $h=r_0\left(1+\log\frac{r_1}{r_0}\right)$ (surf. lat. du bloc, libre),

(154bis) . . . . . $h=r_0\left(\frac{3}{2}+\frac{r_1^2}{r_1^2-r_0^2}\log\frac{r_1}{r_0}\right)$ (surf. lat. inextensible).

M. Tresca étudie encore l'écoulement d'un bloc ductile de rayon r_1 remplissant un vase cylindrique percé en son fond d'un orifice circulaire de rayon r_0 conaxique au vase, sous la poussée F d'un piston qui recouvre toute

Digitized by Google

sa base supérieure. Le cylindre central de rayon r_0, dans sa partie voisine du fond du vase et qui est à l'état plastique, ne supporte presque aucune pression sur ses éléments plans horizontaux, en sorte que ses éléments plans verticaux, normalement auxquels la matière se contracte, éprouvent une pression égale à 2K. Celle-ci est donc la valeur de la poussée P_0 s'exerçant par unité d'aire, aux mêmes niveaux, sur la surface intérieure de l'anneau de rayon $r_1 - r_0$ qui entoure le cylindre central. La formule (151) convient à ce cas puisque les fibres circulaires de rayon r se contractent; et elle donne la pression totale appliquée à une section horizontale $\pi(r_1^2 - r_0^2)$ de l'anneau, pourvu qu'on y fasse $P_0 = 2K$ et qu'on la multiplie par l'aire $\pi(r_1^2 - r_0^2)$. Comme d'ailleurs les éléments plans horizontaux du cylindre central qui sont sur la même section ne supportent que des actions insensibles, cette force totale représente la poussée F exercée par le piston. On a donc

$$(155) \quad \ldots\ldots\ldots \quad F = \pi(r_1^2 - r_0^2)\,K\left(3 + \frac{2r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}\log\frac{r_1}{r_0}\right).$$

Au moyen des formules (153), (153*bis*), (155), et en mesurant directement, dans chaque cas, r_0, r_1, F, M. Tresca a déterminé, pour le plomb, un assez grand nombre de valeurs de K. Ces valeurs, égales en moyenne à 200 kilogrammes par centimètre carré, ont été remarquablement concordantes (vu la nature des recherches), surtout si l'on ne considère que les deux dernières séries d'expériences, faites avec un soin particulier. Elles n'ont varié, pour ces deux séries, que de 190 à 211 dans les cas des formules (153), (155), qui paraissent les mieux justifiées, et elles n'ont été un peu plus inégales (variables de 176 à 221) que dans le cas de la formule (153*bis*) [voir le tableau de la page 191 du mémoire sur le poinçonnage]. M. Tresca a reconnu aussi l'exactitude de la formule (154), qui donne la hauteur des débouchures formées dans des blocs d'une suffisante épaisseur et assez larges pour que le poinçon n'en écrase presque que le cylindre central : ses expériences ont porté à cet effet (p. 215) sur le plomb, la cire à modeler, diverses pâtes céramiques, l'étain et même le cuivre et le fer (*).

De la poussée exercée par une masse sablonneuse sur un corps qu'on y enfonce ou qu'on en retire.

(*) La division *fictive* d'un bloc poinçonné en un cylindre central et un anneau qui, bien que contigus, sont censés soumis à des modes de déformation très-distincts, a pour but de

Digitized by Google

Des cas où l'inclinaison de la force F_χ sur le rayon r est invariable, soit en tous les points également distants du pôle, soit tout le long d'un même rayon r.

52. Mais revenons aux équations (139) [p. 137]. Leur intégration peut s'effectuer dans les deux cas, assez généraux, pour lesquels on a, soit $\frac{d\alpha}{d\theta} = 0$, soit $\frac{d\alpha}{dr} = 0$.

Je n'insisterai guère sur le premier, qui ne me paraît présenter de l'intérêt que lorsqu'il se confond avec celui dont il a été question au numéro 50, c'est-à-dire quand la dérivée $\frac{dp}{d\theta}$ s'annule en même temps que $\frac{d\alpha}{d\theta}$. On trouve, en supposant R′ invariable et appelant c, c' deux constantes arbitraires, que les valeurs de α, p y résultent des formules

$$(156)\quad \log\frac{r^2}{c} + \int\frac{(\cos 2\alpha + R')\, d.2\alpha}{\sin 2\alpha - c'} = 0, \quad (1 - R'^2)\int\frac{dp}{R} = -2c'\theta + 2R'\log r - \int\frac{d.r^2\cos 2\alpha}{r^2}.$$

La première équation (156) s'obtient sous forme finie, et elle se réduit même : 1° à $r^2 \sin^{1+R'}\alpha \cos^{1-R'}\alpha = c$ quand $\frac{dp}{d\theta}$ ou c' s'annulent (comme il

rendre simple un problème inabordable à l'analyse, en introduisant une brusque discontinuité là où il n'existe réellement qu'un changement rapide dans le mode de distribution des pressions.

Elle est moins hardie et plus justifiable que celle qu'a faite Macquorn-Rankine, aux nos 20 et 21 de son mémoire *On the stability of loose Earth*, pour évaluer la poussée éprouvée par la base inférieure d'un prisme vertical solide qu'on enfonce dans un massif sablonneux à surface supérieure horizontale, ou que l'on en retire. L'illustre professeur écossais distingue dans le massif, immédiatement au-dessous du plan de la base inférieure du prisme immergé : 1° une partie centrale, limitée latéralement par le prolongement des faces verticales du prisme, et où il admet qu'un état ébouleux uniforme se produit, par détente ou par contraction des lignes perpendiculaires à ces faces suivant que le cylindre descend ou monte ; 2° une partie extérieure, dont il suppose encore l'état ébouleux uniforme, mais produit au contraire respectivement par compression ou par détente dans le sens horizontal. Il admet donc, non-seulement que les éléments matériels rectilignes horizontaux ou verticaux conservent un instant leurs directions, mais aussi qu'ils passent brusquement, quand on traverse le prolongement des faces latérales du prisme, d'un état de dilatation uniforme et finie à un état de contraction également uniforme et finie. L'égalité des pressions exercées sur les deux faces du prolongement considéré exige d'ailleurs que la force principale horizontale soit une même quantité de part et d'autre ; par suite, d'après la formule (66ter) [p. 55], la force principale s'exerçant sur les éléments plans horizontaux vaudra, d'un côté, le produit de cette quantité par $\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}$, de l'autre, le produit de la même quantité par $\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}$, et elle variera brusquement dans le rapport de 1 à $\left(\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\right)^2 = \mathrm{tg}^4\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)$. Cette force étant, à l'extérieur, le poids $\rho g h$ de la colonne de sable de hauteur h que supporte par unité d'aire le plan de la base du prisme, elle vaudra, sous cette base même, $\left(\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\right)^2\rho g h$ ou $\left(\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}\right)^2\rho g h$ suivant que le prisme est en train de descendre ou de monter. Macquorn-Rankine trouve donc que *la poussée éprouvée par un prisme solide qu'on plonge dans du sable ou qu'on en retire égale le produit du poids du sable déplacé par le facteur* $\left(\frac{1\pm\sin\varphi}{1\mp\sin\varphi}\right)^2$, *$\varphi$ étant l'angle de frottement intérieur du sable.*

Digitized by Google

arrive si p ne change pas pour θ croissant de 2π); 2° à $r^2(\sin 2\alpha - c') = c$ ou $r^2 \sin 2\alpha = c + c'r^2$, quand $R' = 0$; et alors, $r^2 \cos 2\alpha$ valant $\pm \sqrt{r^4 - (c + c'r^2)^2}$, on peut mettre également sous forme finie la seconde (156), qui, sans cela, serait seulement ramenée à un calcul de quadratures.

Le second cas, plus important, est caractérisé par cette circonstance, que l'inclinaison α de la force principale la plus petite F_3 sur le rayon vecteur r est invariable le long d'un même rayon, ou a sa dérivée par rapport à r nulle. Supposons donc $\frac{d\alpha}{dr} = 0$. La condition d'intégrabilité dont il a été parlé à la fin du n° 49 sera

$$(157) \quad \ldots\ldots\ldots \frac{d}{d\theta}\left[(\cos 2\alpha - R')\left(1 + \frac{d\alpha}{d\theta}\right)\right] = 0.$$

Elle s'intègre immédiatement par rapport à θ, et il en est de même de la première (139) par rapport à r, si on la divise préalablement par $\cos 2\alpha - R'$.

Mais bornons-nous au cas où $R' =$ constante. Alors l'expression $(\cos 2\alpha - R')\left(1 + \frac{d\alpha}{d\theta}\right)$ ne dépend pas de r, et, si l'on appelle c une constante arbitraire, l'équation (157) revient à poser

$$(158) \quad \ldots\ldots\ldots (\cos 2\alpha - R')\left(1 + \frac{d\alpha}{d\theta}\right) = c - R'.$$

On en tire

$$(159) \quad \ldots\ldots \frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{\cos 2\alpha - R'}{c - \cos 2\alpha}, \quad \frac{d(\alpha + \theta)}{d\alpha} = \frac{c - R'}{c - \cos 2\alpha},$$

abstraction faite de la solution singulière

$$(159^{bis}) \quad \ldots\ldots c - \cos 2\alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1-c}{1+c}}.$$

L'intégration de la deuxième (159) donne : 1° quand c est en dehors des deux limites ± 1,

$$(160) \quad \ldots\ldots \operatorname{tg}\left[\frac{\sqrt{c^2 - 1}}{c - R'}(\alpha + \theta - \text{const})\right] = \frac{\sqrt{c^2 - 1}}{c - 1} \operatorname{tg} \alpha;$$

Digitized by Google

2° quand c est compris entre ± 1, la formule

$$(161) \quad \ldots \quad \operatorname{tg\,hyp}\left[\frac{\sqrt{1-c^2}}{c-R'}(\alpha+\theta-\text{const})\right]=-\frac{\sqrt{1-c^2}}{1-c}\operatorname{tg}\alpha$$

pour les valeurs de $\operatorname{tg}\alpha$ comprises entre $\mp\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}$, et la formule

$$(162) \quad \ldots \quad \operatorname{cotg\,hyp}\left[\frac{\sqrt{1-c^2}}{c-R'}(\alpha+\theta-\text{const})\right]=-\frac{\sqrt{1-c^2}}{1-c}\operatorname{tg}\alpha$$

pour les valeurs de $\operatorname{tg}\alpha$ extérieures aux limites $\mp\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}$ (*).

Les équations (139), en tenant compte de (158) et (159), deviennent

$$\frac{1-R'^2}{R}\frac{dp}{dr}=(R'-c)\frac{d.\log r^2}{dr},$$

$$\frac{1-R'^2}{R}\frac{dp}{d\theta}=(c-R')\frac{d\log(\cos 2\alpha-R')}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{d\alpha}=(R'-c)\frac{d\log(c-\cos 2\alpha)}{d\theta}:$$

respectivement multipliées par dr, $d\theta$, puis ajoutées et intégrées en appelant p_0 la valeur de p au point où r et α ont deux valeurs déterminées r_0, α_0, elles donnent enfin

$$(163) \quad \ldots\ldots \quad (1-R'^2)\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{R}=\log\left[\frac{r_0^2}{r^2}\frac{c-\cos 2\alpha_0}{c-\cos 2\alpha}\right]^{c-R'}.$$

Pour un même mode d'équilibre, les angles θ, α varient avec continuité d'un point du massif aux points voisins. Par suite, dans le cas de la formule (160), les quantités α, $\frac{\sqrt{c^2-1}}{c-R'}(\alpha+\theta-\text{const})$, dont les tangentes gardent entre elles un rapport fini constant, deviendront à la fois, soit multiples pairs de $\frac{\pi}{2}$, soit multiples impairs de $\frac{\pi}{2}$, et l'une d'elles ne pourra croître de π sans que l'autre varie aussi de π.

D'ailleurs, quoique l'on puisse, dans (160), donner à α et à θ toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, ces variables resteront comprises, dans chaque

(*) On sait qu'on appelle sinus hyperbolique, cosinus hyperbolique, tangente hyperbolique et cotangente hyperbolique d'un arc x les fonctions

$$\sin\text{hyp}\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \cos\text{hyp}\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \operatorname{tg\,hyp}x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},\quad \operatorname{cotg\,hyp}x=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}.$$

Digitized by Google

mode d'équilibre, entre des limites restreintes. En effet, la constante R', pour une masse plastique ou pulvérulente quelconque, est toujours moindre que 1, ou égale au sinus d'un angle aigu positif φ, et la première relation (159) montre que θ devient maximum ou minimum pour les valeurs de α qui rendent $\cos 2\alpha$ égal à R' ou $\sin\varphi$: *le massif ne s'étend donc jamais des deux côtés d'un rayon r sur lequel on aurait* $\cos 2\alpha = \sin\varphi$; il est forcément compris tout entier dans un angle dièdre tel, que $\cos 2\alpha$ reste, à son intérieur, constamment plus grand ou constamment plus petit que $\sin\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$. En retranchant de α un multiple de π, ce qui ne change rien à la direction de la force principale F_3, on pourra se contenter de faire varier cet angle α, soit, de part et d'autre de zéro, entre les limites $\pm\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$, soit, de part et d'autre de $\frac{\pi}{2}$, entre les limites $\frac{\pi}{2} \pm \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$. Dans les deux cas, $\cos 2\alpha$, et $\frac{d\theta}{d\alpha}$, p, d'après (159) et (163), prendront les mêmes valeurs pour deux valeurs de α équidistantes de la moyenne zéro ou $\frac{\pi}{2}$, en sorte que le mode d'équilibre considéré sera symétrique par rapport au plan *médian,* mené suivant le troisième axe coordonné Oz et le rayon vecteur sur lequel on aura $\alpha = 0$ ou $= \frac{\pi}{2}$. Si la valeur moyenne de α est zéro, ou que $\cos 2\alpha - R'$ soit > 0, la pression principale maxima $-F_3$ sera, aux divers points du plan médian, contenue dans ce plan même ou dirigée suivant l'axe de symétrie de l'équilibre, et la matière s'y trouvera contractée dans le sens de cet axe, dilatée ou détendue dans le sens perpendiculaire. Si, au contraire, la valeur moyenne de α est $\frac{\pi}{2}$ ou que $\cos 2\alpha - R'$ soit < 0, c'est la pression principale la plus petite $-F_1$ qui, sur l'axe de symétrie ou sur le plan médian, est dirigée suivant cet axe, et la matière est dilatée le long de cet axe de symétrie, contractée dans le sens perpendiculaire. L'accroissement total de θ, lorsque α varie, à partir de sa valeur moyenne 0 ou $\frac{\pi}{2}$, jusqu'à la valeur extrême commune $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$, s'évalue aisément au moyen de (160). Le double de cet angle n'est autre, en valeur absolue, que l'angle dièdre A occupé par le massif quand celui-ci s'étend dans tout l'espace où $\cos 2\alpha - \sin\varphi$ conserve même signe; il a pour expressions, en prenant tous les arcs-tangente ou cotangente entre $\mp \frac{\pi}{2}$: 1°

$$(164) \quad \ldots \quad A = -\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \frac{2(c - \sin\varphi)}{\sqrt{c^2 - 1}} \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{\sqrt{c^2-1}}{c-1} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

Digitized by Google

quand *il y a contraction de la matière le long de l'axe de symétrie de l'équilibre*, et 2°

$$(165) \quad . \quad . \quad . \quad A = \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) - \frac{2(c - \sin\varphi)}{\sqrt{c^2 - 1}} \text{ arc cotg} \left[\frac{\sqrt{c^2 - 1}}{c - 1} \text{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

lorsqu'il y a, au contraire, détente de la matière le long de l'axe de symétrie.

Considérons actuellement les modes d'équilibre que représentent les formules (161) et (162). La tangente de l'angle α ne peut jamais y franchir les limites $\mp\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}$; car les premiers membres de ces formules tendent vers les valeurs ± 1, sans les égaler, quand $\alpha + \theta$ croît indéfiniment en valeur absolue. Chacune des formules (161), (162) représente donc au moins un mode distinct d'équilibre, dans lequel α varie, à part un multiple de π, soit de part et d'autre de zéro, s'il s'agit de (161), soit de part et d'autre de $\frac{\pi}{2}$, s'il s'agit de (162), mais en tout dans un intervalle inférieur à π, quoique $\alpha + \theta$, θ reçoivent ainsi toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$: α devient sensiblement constant quand sa tangente est voisine de $\mp\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}$, en sorte que la solution singulière (159bis) est comprise, comme cas limite intermédiaire, dans les solutions (161), (162).

En réalité, θ étant encore maximum ou minimum, d'après la première (159), pour les valeurs $\pm\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$, et $\frac{\pi}{2} \pm \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$ de α, c'est-à-dire pour celles qui annulent $\cos 2\alpha - R'$, α ne pourra varier au plus dans un même mode d'équilibre qu'entre $\pm\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$ ou entre $\frac{\pi}{2} \pm \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$. Ces nouvelles limites ne coïncident généralement pas avec les précédentes $\pm$ arc tg $\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}$, $\frac{\pi}{2} \pm$ arc tg $\sqrt{\frac{1+c}{1-c}}$, et les formules (161), (162) représenteront en réalité quatre modes d'équilibre. Le plus important à considérer, en vue de ce qui suit, est celui où $\cos 2\alpha - R'$ s'annule aux deux limites : quand c est inférieur à $\sin\varphi$, ou que arc tg $\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}$ est $> \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$, c'est le mode qui correspond à (161) et où $\alpha = 0$ sur le plan médian, en sorte qu'il s'agit alors d'un mode d'équilibre avec contraction le long de l'axe de symétrie de l'équilibre; quand, au contraire, c est $> \sin\varphi$, ou que arc tg $\sqrt{\frac{1+c}{1-c}}$ est $> \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$, c'est dans le cas de la formule (162), avec $\alpha = \frac{\pi}{2}$ sur le plan médian, que $\cos 2\alpha - R'$ s'annule aux deux limites, et alors le mode d'équilibre considéré est produit avec dilatation le long de l'axe. L'accroissement total de θ,

Digitized by Google

lorsque α varie encore, à partir de sa valeur moyenne 0 ou $\frac{\pi}{2}$, jusqu'à la valeur extrême commune $\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}$, se calcule au moyen de (161) et (162). Le double de cet accroissement n'est autre, en valeur absolue, que l'angle dièdre A du massif, supposé remplir toute l'étendue dans laquelle $\cos 2\alpha - R'$ conserve même signe; il a pour expressions respectives : 1°

$$(166) \quad . \quad . \quad A = -\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) - \frac{2(c-\sin\varphi)}{\sqrt{1-c^2}} \operatorname{arc\,tg\,hyp}\left[\frac{\sqrt{1-c^2}}{1-c}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\right],$$

quand c est $<\sin\varphi$ et qu'*il y a contraction dans le plan bissecteur de l'angle dièdre ou le long de l'axe de symétrie de l'équilibre*, 2°

$$(167) \quad . \quad . \quad A = \left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) - \frac{2(c-\sin\varphi)}{\sqrt{1-c^2}} \operatorname{arc\,cot\,hyp}\left[\frac{\sqrt{1-c^2}}{1-c}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\right],$$

lorsque c est $>\sin\varphi$, ou qu'*il y a dilatation de la matière le long de l'axe de symétrie.*

Le seul, parmi tous les modes précédents d'équilibre-limite, pour lequel la force F_3 reprenne sa direction première quand θ croît de 2π, et qui puisse convenir au cas d'un massif entourant complétement le pôle O, est celui que représente la solution singulière (159bis). D'ailleurs, comme il faut, dans un pareil massif, que p retrouve aussi sa première valeur lorsque θ croît de 2π, la seconde formule (139), réduite à $\frac{1-R'^2}{R}\frac{dp}{d\theta} = -2\sin 2\alpha$, montre, à défaut de l'intégrale (163) devenue de forme indéterminée, que l'on doit même avoir alors $\sin 2\alpha = 0, c = \pm 1$. *La solution double déjà trouvée précédemment et à laquelle répond la formule* (144) *est donc la seule, de toutes celles où α ne dépend pas de r, qui puisse convenir à un massif entourant complétement l'axe* Oz. Les autres ne conviennent qu'à des massifs limités latéralement.

Équilibre-limite d'un massif comprimé entre deux plans rigides qui se coupent.

53. Considérons en particulier un massif limité par deux plans *rigides*, menés suivant l'axe Oz. Nous supposerons ces plans assez rugueux pour empêcher tout glissement fini des particules contiguës du massif. Si celui-ci est un corps plastique, ou que $R' = \sin\varphi = 0$, ses couches adjacentes aux plans n'éprouveront ni contraction, ni dilatation, et il en sera par suite de même, à cause du principe de la conservation des volumes, des fibres infi-


Digitized by Google

niment petites qui leur seront perpendiculaires; mais ces fibres éprouveront les unes par rapport aux autres les glissements maximums, et elles feront, comme on sait, des angles de 45° avec les dilatations principales ∂_1, ∂_3 ou avec les forces principales correspondantes F_1, F_3 : la condition spéciale aux parois sera donc, soit $\alpha = \pm \frac{\pi}{4}$, soit $\alpha = \pm \frac{3\pi}{4}$, c'est-à-dire, en somme, $\cos 2\alpha - R' = 0$. Si, au contraire, le massif est pulvérulent, l'angle de frottement extérieur vaudra φ, et la loi énoncée à la fin du n° 25 (p. 57) montre qu'on aura contre chacun des plans rugueux, en valeur absolue, $\alpha =$ soit $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$, soit $\pi - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$, c'est-à-dire encore la même condition spéciale $\cos 2\alpha - \sin \varphi = 0$ ou $\cos 2\alpha - R' = 0$.

Les seuls modes d'équilibre, considérés au numéro précédent, qui puissent convenir à un massif compris entre deux plans rugueux, sont donc ceux dans lesquels l'angle appelé ci-dessus A ne diffère pas, en valeur absolue, de l'angle même des deux plans. Et ces modes d'équilibre pourront bien, d'ailleurs, se présenter dans un tel massif, orienté de manière à avoir pour plan bissecteur de son angle le plan sur lequel α égale, suivant les cas, 0 ou $\frac{\pi}{2}$; car la condition spéciale aux parois s'y trouve identiquement satisfaite pour les deux valeurs extrêmes de θ.

Les cas où A est positif diffèrent, par un caractère important, de ceux où A est négatif. Observons que, lorsque α varie de 0 ou $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$, l'expression (134) de T est négative. Par suite, si l'on conçoit, dans le massif, un coin de matière compris entre deux plans menés suivant $0z$ et également inclinés de part et d'autre du plan médian ou de l'axe de symétrie, l'action tangentielle exercée sur chaque face de ce coin par le reste du massif est dirigée vers l'arête $0z$, quand A est positif et que cette action se confond pour la face du coin qui a l'angle θ le plus grand avec la force T considérée; elle est, au contraire, dirigée dans le sens du prolongement des rayons r correspondants, quand A est négatif. Dans le premier cas, les couches du massif voisines des plans solides glissent contre ces plans en s'éloignant de l'arête $0z$, et on peut dire qu'il y a *écoulement divergent sur les deux faces;* dans le second cas, les couches superficielles considérées se rapprochent au contraire de $0z$, ce que nous exprimerons en disant qu'il y a *écoulement convergent sur les deux faces*. Ainsi, *l'angle dièdre* A *des deux plans rigides est regardé comme*

Digitized by Google

positif, dans les formules (164) *à* (167), *quand la matière du massif voisine des deux plans solides s'éloigne de leur arête d'intersection, ou qu'il y a écoulement divergent sur les deux faces; au contraire, l'angle* A *est supposé négatif, dans les mêmes formules, quand la matière contiguë aux plans solides se rapproche de leur intersection, ou qu'il y a écoulement convergent sur les deux faces du massif.*

Lorsque α va de zéro ou $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}$, θ croît ou décroît, d'après la première formule (159), suivant que $c - \cos 2\alpha$ est >0 ou <0; or $c - \cos 2\alpha$ conserve le même signe, dans tout cet intervalle, et vaut finalement $c - \sin\varphi$ ou $c - R'$. Par suite, A est positif quand c est plus grand que $\sin\varphi$ ou R', négatif quand c est plus petit que R'. La formule (163) montre donc que *la pression moyenne p varie, le long d'un même rayon r émané du sommet, en sens inverse de la distance r quand il y a écoulement divergent sur les deux faces, et dans le même sens que r quand l'écoulement sur les deux faces est convergent.* S'il y a contraction le long de l'axe, ou qu'on fasse varier α de 0 à $\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}$, l'expression $c - \cos 2\alpha$, variant de $c - 1$ à $c - \sin\varphi$, grandit ou diminue ainsi, en valeur absolue, suivant que $c - \sin\varphi$ est >0 ou <0; dans les deux cas, p décroît, d'après (163). Le contraire arriverait s'il y avait dilatation le long de l'axe ou qu'on fit varier α de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}$. Ainsi, *quand on s'éloigne de l'axe de symétrie ou du plan bissecteur du massif pour se rapprocher des côtés ou des faces, en se tenant à une même distance du sommet, la pression moyenne p croît ou décroît, suivant que l'équilibre-limite est produit avec dilatation ou avec contraction de la matière le long de l'axe.*

Cherchons enfin quelles valeurs il faut attribuer à c pour obtenir les modes d'équilibre-limite que comporte un massif dont on donne l'angle A, angle supposé d'ailleurs négatif ou positif suivant que les mouvements sur les deux faces doivent être *convergents* ou *divergents,* c'est-à-dire dirigés vers l'arête Oz ou dans le sens contraire.

Nous simplifierons les premières expressions (164), (165) de A en prenant, au lieu de c, un nouveau paramètre ε, compris entre $\mp\frac{\pi}{2}$, et lié à c par la relation

$$(168) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad c = \frac{1 - \sin\varphi \sin\varepsilon}{\sin\varphi - \sin\varepsilon}.$$

Digitized by Google

La dérivée $\frac{dc}{d\varepsilon}$ vaut $\frac{\cos^2\varphi\cos\varepsilon}{(\sin\varphi-\sin\varepsilon)^2}$; elle est positive : donc ε grandit en même temps que c. Quand on fait varier ε de $-\frac{\pi}{2}$ à φ, c croît avec continuité de $+1$ à ∞ ; quand ε va de φ à $\frac{\pi}{2}$, c grandit de $-\infty$ à -1 : ainsi, à chaque valeur de c, comprise entre $-\infty$ et -1, 1 et ∞, il correspond une valeur de ε comprise entre $\mp\frac{\pi}{2}$, et une seule. Cela posé, on trouve aisément

$$c^2-1=\frac{\cos^2\varphi\cos^2\varepsilon}{(\sin\varphi-\sin\varepsilon)^2},\quad c-1=\frac{(1-\sin\varphi)(1+\sin\varepsilon)}{\sin\varphi-\sin\varepsilon},\quad c-\sin\varphi=\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi-\sin\varepsilon}.$$

Les formules (164), (165) deviennent par suite :

$$(169)\quad . \; . \quad A=-\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\frac{\cos\varphi}{\cos\varepsilon}=\cos\varphi\left[\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}-\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}\right],$$

$$(170)\quad . \; . \quad A=\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)-\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)\frac{\cos\varphi}{\cos\varepsilon}=\cos\varphi\left[\frac{\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)}-\frac{\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)}\right].$$

De même, pour simplifier les expressions (166), (167) de A, nous appellerons ε' un paramètre positif tel, que

$$(168^{bis})\quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad c=\frac{\sin\varphi\cos\text{hyp}\,\varepsilon'\mp 1}{\cos\text{hyp}\,\varepsilon'\mp\sin\varphi},$$

les signes supérieurs se rapportant aux valeurs de c comprises entre -1 et $\sin\varphi$, c'est-à-dire aux modes d'équilibre avec contraction le long de l'axe de symétrie, les signes inférieurs aux valeurs de c comprises entre $\sin\varphi$ et 1, ou aux modes d'équilibre avec dilatation le long de l'axe. La dérivée $\frac{dc}{d\varepsilon'}$ égale $\pm\frac{\cos^2\varphi\sin\text{hyp}\,\varepsilon'}{(\cos\text{hyp}\,\varepsilon'\mp\sin\varphi)^2}$: donc ε' croît, de zéro à ∞, quand c grandit de -1 à $\sin\varphi$ ou diminue de 1 à $\sin\varphi$, en sorte qu'à chaque valeur de c qui est à considérer dans les formules (166) et (167), il correspond une valeur positive de ε' et une seule. Or, si l'on substitue à c son expression (168bis), on trouve

$$1-c^2=\frac{\cos^2\varphi\sin\text{hyp}^2\varepsilon'}{(\cos\text{hyp}\,\varepsilon'\mp\sin\varphi)^2},\quad 1-c=\frac{(1-\sin\varphi)(\cos\text{hyp}\,\varepsilon'\pm 1)}{\cos\text{hyp}\,\varepsilon'\mp\sin\varphi},\quad c-\sin\varphi=\frac{\mp\cos^2\varphi}{\cos\text{hyp}\,\varepsilon'\mp\sin\varphi},$$

Digitized by Google

et il vient finalement, pour tenir lieu de (166) et (167) :

$$(169^{bis}) \quad . \; . \quad A = -\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \frac{\varepsilon' \cos \varphi}{\sin \text{hyp}\, \varepsilon'} = \cos \varphi \left[\frac{\varepsilon'}{\sin \text{hyp}\, \varepsilon'} - \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}\right],$$

$$(170^{bis}) \quad . \; . \; . \quad A = \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) - \frac{\varepsilon' \cos \varphi}{\sin \text{hyp}\, \varepsilon'} = \cos \varphi \left[\frac{\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)} - \frac{\varepsilon'}{\sin \text{hyp}\, \varepsilon'}\right].$$

Remarquons l'intime analogie qui existe entre ces formules et les précédentes (169), (170), quand on y regarde le paramètre ε' comme correspondant respectivement aux paramètres $\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2} + \varepsilon$, également positifs, mais variables seulement de 0 à π et non, comme ε', de 0 à ∞. L'analogie n'est pas moindre entre la double expression (168bis) de c et l'expression (168), qu'on pourrait écrire aussi

$$c = \frac{\sin \varphi \cos \left(\frac{\pi}{2} \mp \varepsilon\right) \mp 1}{\cos \left(\frac{\pi}{2} \mp \varepsilon\right) \mp \sin \varphi}.$$

Les formules (169), (169bis), relatives aux modes d'équilibre avec contraction le long de l'axe de symétrie, ne diffèrent d'ailleurs des formules (170), (170bis), concernant, au contraire, les modes d'équilibre avec dilatation le long de l'axe, que par les changements de φ en $-\varphi$ et de A en $-$A.

Il est aisé de voir en quoi les formules (169) et (169bis), (170) et (170bis), se complètent mutuellement. On sait que le rapport d'un arc à son sinus circulaire, d'abord égal à 1, croît sans cesse, jusqu'à l'infini, quand l'arc grandit de zéro à π, tandis qu'au contraire le rapport d'un arc à son sinus hyperbolique, d'abord égal à 1, décroît sans cesse, jusqu'à zéro, quand l'arc croît de zéro à ∞. Par suite, les deux rapports $\frac{\varepsilon'}{\sin \text{hyp}\, \varepsilon'}, \frac{\frac{\pi}{2} \mp \varepsilon}{\sin\left(\frac{\pi}{2} \mp \varepsilon\right)}$, quand on y fait varier ε' de zéro à l'infini et $\frac{\pi}{2} \mp \varepsilon$ de 0 à π, reçoivent à eux deux, une fois et une seule, les différentes valeurs comprises entre 0 et ∞.

Les expressions (169), (169bis) de A, qui représentent les angles dièdres de tous les massifs comportant un mode d'équilibre-limite avec contraction

Digitized by Google

le long de l'axe, ont donc pour valeurs extrêmes $-\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$ et ∞. Ainsi, *tout massif dont l'angle* A *est supérieur à* $-\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$ *peut présenter un mode d'équilibre-limite, et un seul, avec contraction de la matière le long de son axe, c'est-à-dire dans son plan bissecteur ;* et la valeur de c qui correspond à ce mode d'équilibre s'obtiendra en portant dans (168) ou (168bis) la racine unique ε ou ε' fournie par l'une ou par l'autre des équations (169), (169bis).

De même, les expressions (170), (170bis) de A varient de $-\infty$ à $\frac{\pi}{2}+\varphi$. Donc, *tout massif dont l'angle dièdre est inférieur à* $\frac{\pi}{2}+\varphi$ *comporte un mode d'équilibre-limite, et un seul, avec dilatation de la matière le long de l'axe de symétrie ou dans son plan bissecteur ;* et l'on obtient la valeur de c qui correspond à ce mode d'équilibre en portant dans (168) ou (168bis) la racine ε ou ε' tirée de (170) ou (170bis).

Les massifs dont l'angle est compris entre les deux limites $\varphi \pm \frac{\pi}{2}$ sont les seuls qui puissent, suivant les cas, présenter, tantôt un mode d'équilibre-limite avec contraction le long de l'axe, tantôt un mode d'équilibre-limite avec dilatation le long de l'axe.

Lorsqu'il y a contraction le long de l'axe et qu'en même temps A est positif, la matière située sur le plan bissecteur de l'angle dièdre que remplit le massif se rapproche évidemment de l'arête de cet angle, tandis que celle qui est contiguë aux faces s'éloigne de la même arête. Des mouvements inverses se produisent lorsqu'il y a dilatation le long de l'axe et que A est négatif. Ainsi, ces deux modes d'équilibre-limite répondent aux cas où des pressions inégales déterminent un double écoulement, entre les deux plans rigides supposés *fixes*, en refoulant la matière, soit du plan bissecteur vers l'arête et de l'arête vers les faces, soit des faces vers l'arête et de l'arête vers le plan bissecteur. Un tel écoulement est d'ailleurs possible quelle que soit la valeur absolue de l'angle A du massif, conformément au résultat obtenu.

Au contraire, lorsque A est négatif et qu'il y a contraction le long de l'axe, ou lorsque A est positif et qu'il y a dilatation le long de l'axe, les mouvements, de même sens sur les faces que sur le plan médian, sont partout convergents ou partout divergents. C'est ce qui arrive pour un massif comprimé entre deux plans rigides *mobiles autour de leur intersection,* quand la

Digitized by Google

force extérieure qui s'oppose à ce que leur angle grandisse est, ou assez petite pour que le massif, soumis d'ailleurs à certaines pressions intérieures, se détende latéralement en écartant les deux plans et se rapproche de l'arête, ou assez grande pour produire l'écrasement du massif en éloignant sa matière de l'arête. A cause des limites trouvées ci-dessus pour A, la détente dont il s'agit n'est possible, du moins dans la supposition faite que les pressions principales soient pareillement orientées tout le long d'un même rayon r émané de l'origine, que si l'angle A du massif est inférieur à $\frac{\pi}{2} - \varphi$ en valeur absolue; et l'écrasement latéral n'est possible, dans la même supposition, que si la valeur absolue de A est moindre que $\frac{\pi}{2} + \varphi$ (*).

(*) J'avais déjà résumé, dans deux articles des *Comptes rendus* de l'Académie des sciences de Paris (t. LXXX, 1er et 15 mars 1875), la plupart de ces résultats, auxquels j'étais parvenu par une voie moins simple.

Digitized by Google

NOTE COMPLÉMENTAIRE.

—

Sur la méthode de M. Macquorn-Rankine, pour le calcul des pressions exercées aux divers points d'un massif pesant que limite supérieurement une surface cylindrique à génératrices horizontales et qui est indéfini dans les autres sens; par M. J. Boussinesq.

Dans son mémoire, remarquable à plusieurs titres, *On the stability of loose Earth* (*), le regretté M. Macquorn-Rankine a donné une méthode ingénieuse pour l'étude des distributions planes des pressions à l'intérieur de masses pesantes quelconques en équilibre, et il a essayé, au moyen d'une hypothèse qui ramène analytiquement la question au problème classique du refroidissement d'une barre homogène, de l'employer dans la recherche des pressions produites aux divers points d'un massif sablonneux dont le profil supérieur est courbe. Quoique l'hypothèse dont il s'agit ne convienne pas pour un tel massif, on me saura peut-être gré de reproduire, en la simplifiant et la complétant au besoin, l'analyse de l'illustre ingénieur et professeur anglais. Du reste, un procédé graphique approché d'intégration, qu'il indique d'après sir William Thomson, et qu'il n'applique qu'à sa solution hypothétique, pourrait l'être tout aussi simplement, comme je le montre, aux vraies équations du problème.

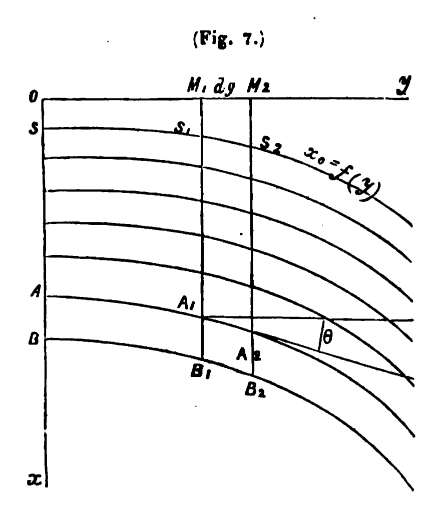
I. L'idée fondamentale de cette méthode consiste à décomposer le milieu en couches infiniment minces, *dont les deux faces ne soient soumises qu'à* Formule fondamentale de M. Macquorn-Rankine.

(*) *Sur la stabilité de la terre sans cohésion,* aux Transactions philosophiques de Londres (1856-1857). M. Rankine y a établi notamment l'équation de l'état ébouleux (94, ci-dessus) et l'a appliquée au cas d'un massif pesant homogène limité supérieurement par un talus plan.

Digitized by Google

des pressions verticales. Une telle décomposition est toujours possible quand l'état du massif se trouve, comme on le suppose, symétrique par rapport au plan vertical des xy et le même aux divers points d'une perpendiculaire quelconque à ce plan. En effet, par raison de symétrie, tout élément de surface normal aux xy est alors soumis à une pression parallèle aux xy, tandis qu'un élément de surface parallèle au même plan des xy éprouve une pression normale à ce plan. Or, si l'on mène successivement, par un point du milieu, une infinité d'éléments de surface perpendiculaires aux xy et ayant toutes les inclinaisons possibles sur l'axe *horizontal* des y, la pression qu'ils supporteront, devant changer simplement de sens quand cette inclinaison augmentera de 180°, c'est-à-dire quand on considérera les deux forces égales et contraires appliquées aux deux faces d'un même élément plan, devra prendre aussi toutes les orientations possibles dans le plan des xy. Il passe donc, par chaque point du corps, un élément superficiel, perpendiculaire aux xy, qui est soumis à une pression verticale. En juxtaposant des infinités d'éléments de surface pareils, on formera une famille de cylindres ayant pour génératrices des normales au plan des xy et pour directrices, dans ce même plan, des courbes telles que AA_1A_2, BB_1B_2, (fig. 7) : chacune des couches que considère M. Rankine est comprise entre deux de ces cylindres; des sections perpendiculaires à l'axe des y et infiniment voisines la divisent en filets élémentaires ayant pour profil des parallélogrammes mixtilignes tels que $A_1B_1B_2A_2$. On peut d'ailleurs supposer au massif, dans le sens normal aux xy, une largeur égale à l'unité, de manière à n'avoir à s'occuper que des deux coordonnées x, y, ou des dimensions parallèles au plan de symétrie xOy.

(Fig. 7.)



La propriété caractéristique des couches infiniment minces ABB_1A_1 consiste en ce que la pression exercée à travers la section verticale A_1B_1, menée par un quelconque de leurs points, est parallèle au profil de l'élément adjacent A_1A_2 d'une de leurs faces, ou est, en d'autres termes, tan-

Digitized by Google

gentielle à la couche, comme le serait la tension exercée à travers les sections verticales d'une membrane cylindrique flexible, ou simplement du fil auquel se réduirait la membrane si sa largeur devenait infiniment petite. En effet, les pressions que supportent les deux faces A_1A_2, B_1B_2 de l'élément de volume $A_1A_2B_2B_1$ sont verticales, appliquées sensiblement aux milieux de ces faces et passent par suite, sauf erreur négligeable, par le centre de gravité de l'élément de volume, comme son poids. Si donc les deux pressions exercées sur les faces A_1B_1, A_2B_2, pressions appliquées aussi aux milieux des faces considérées, et d'ailleurs, par raison de continuité, sensiblement égales et de sens inverse, n'étaient pas parallèles à A_1A_2, elles seraient les seules forces, sollicitant l'élément de volume, qui ne passeraient point par son centre de gravité, et elles le feraient tourner autour de ce centre parallèlement au plan des xy. Une pareille rotation ne pouvant avoir lieu puisque l'équilibre existe, la pression appliquée à la section verticale A_1B_1 d'une couche est bien parallèle au profil de ses deux faces (*). Par suite, *chaque couche pourra être assimilée à une membrane flexible, qu'on supposerait capable de résister à des pressions aussi bien qu'à des tensions* (**).

Un élément de couche $A_1B_1B_2A_2$ n'est soumis, dans le sens horizontal des y, à aucune autre force que les deux composantes normales des pressions, sensiblement opposées, qu'éprouvent les deux sections A_1B_1, A_2B_2.

(*) Au reste, cette proposition n'est que le cas particulier le plus simple du théorème connu, dit *de réciprocité*, d'après lequel, si l'on considère chacune des deux forces appliquées à l'unité d'aire de deux éléments plans menés par un même point, leurs projections respectives sur la normale à l'autre élément plan sont égales; quand la projection dont il s'agit est nulle pour l'une des forces, elle l'est donc aussi pour l'autre, et chacune d'elles est parallèle à l'élément plan que l'autre sollicite.

(**) Chacune de ces couches présente aussi une grande analogie avec une voûte en berceau, divisée, *par des plans de joint verticaux infiniment voisins, en tranches dont deux contiguës exercent l'une sur l'autre des actions réductibles à une seule force bien déterminée :* alors la courbede s centres de pression, au point où elle coupe un plan de joint quelconque, est tangente à la poussée que supporte ce plan (voir le cours de *Mécanique appliquée de M. Collignon*, t. Ier, n° 231, p. 409). On peut, afin de mieux saisir l'analogie, supposer la voûte réduite à une couche cylindrique infiniment mince, ayant pour profil la courbe même des centres de pression, et assimiler le reste de sa matière à une surcharge, qui exercerait sur les deux faces de cette couche des pressions verticales, positives sur la face supérieure, négatives sur la face inférieure.

Digitized by Google

L'équilibre exige donc que ces deux composantes soient égales : en d'autres termes, *la poussée exercée horizontalement à travers les sections verticales d'une même couche est constante.* M. Rankine la représente par dH, car il appelle

$$H$$

la somme de toutes les poussées pareilles supportées par la matière comprise entre la face supérieure SS_1 d'une première couche, dont l'équation $x_0 = f(y)$ est donnée, et la face supérieure AA_1 de la couche quelconque ABB_1A_1. La quantité H est donc, pour tout point A_1, ou (x, y), du plan xOy, la composante totale, dans le sens horizontal, de la pression exercée au-dessus du point A_1 à travers la section verticale S_1A_1 qu'on y suppose menée dans le massif : c'est une certaine fonction φ de x et de y, qui conserve la même valeur sur toute l'étendue de la surface de séparation de deux couches contiguës. Aussi M. Rankine appelle-t-il les surfaces pareilles à AA_1A_2 *des surfaces de poussée uniforme.* Si l'on résout par rapport à x l'équation $H = \varphi(x,y)$, on voit que l'ordonnée x d'un point devient une fonction de son abscisse y et du paramètre H. Par suite, toute fonction de x et de y pourra être censée dépendre de y et de H, qui seront désormais les deux variables indépendantes à considérer.

Il ne reste plus, pour avoir exprimé complétement l'équilibre d'un élément de couche $A_1B_1B_2A_2$, qu'à égaler à zéro la somme des actions verticales qui lui sont appliquées. Il y aura :

1° Les composantes verticales des poussées exercées sur A_1B_1 et sur A_2B_2. La première de ces poussées, parallèle à A_1A_2, a pour composante verticale le produit de sa composante horizontale dH par la tangente de l'inclinaison, θ, de A_1A_2 sur l'axe des y, c'est-à-dire par la dérivée partielle $\frac{dx}{dy}$; la composante verticale de la seconde, changée de signe, aura la même valeur augmentée de sa différentielle prise en passant de A_1B_1 à A_2B_2, c'est-à-dire en laissant H, dH invariables, et faisant croître y de la projection $M_1M_2 = dy$ de A_1A_2 sur Oy : la somme de ces deux composantes est donc

$$-\frac{d^2x}{dy^2}\,dy\,dH;$$

Digitized by Google

2° Les pressions exercées sur les deux éléments A_1A_2, B_1B_2 des faces de la couche; j'appellerai, avec M. Rankine,

$$X$$

la pression exercée au point (x, y) ou A_1 de la face supérieure et rapportée à l'unité de projection horizontale; la pression exercée sur A_1A_2 vaudra donc Xdy, tandis que la pression exercée sur B_1B_2, changée de signe, aura la même valeur augmentée de sa différentielle prise en passant de A_1A_2 à B_1B_2, ou en laissant invariables y, dy et faisant croître H de dH; la somme est

$$-\frac{dX}{dH}dHdy;$$

3° Le poids de l'élément de volume, c'est-à-dire, si l'on désigne par G le poids, supposé constant, de l'unité de volume du massif,

$$Gdy \cdot A_1B_1 = Gdy\frac{dx}{dH}dH.$$

L'équation cherchée est donc

$$\left(-\frac{d^2x}{dy^2} - \frac{dX}{dH} + G\frac{dx}{dH}\right)dydH = 0,$$

ou bien

$$(\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{d}{dH}\left(x - \frac{X}{G}\right) = \frac{1}{G}\frac{d^2x}{dy^2}.$$

C'est la formule fondamentale de la théorie de M. Rankine (*).

II. Les conditions d'équilibre d'un élément de volume ne peuvent pas en donner d'autre, car nous les avons toutes considérées; et, cependant, il faudrait avoir deux équations distinctes pour calculer de proche en proche les variations des deux fonctions inconnues x et X, qui définissent l'état mécanique du milieu et qu'on doit supposer données directement pour $H = 0$, c'est-à-dire sur la surface initiale SS_1. Mais il était aisé de prévoir que, des

Autre équation différentielle, résultant de la nature spéciale du massif.

(*) Elle porte, dans son mémoire, le n° 25.

deux relations cherchées, une au moins ne pourrait pas se déduire des formules générales de l'équilibre et résulterait de la nature particulière du corps. En effet, la matière doit transmettre les pressions de différentes manières, suivant qu'elle est, soit à l'état *élastique*, et *solide*, *fluide*, ou *pulvérulente*, soit dans cet état d'*équilibre-limite* qu'on appelle *plastique* pour les solides, *ébouleux* pour les masses inconsistantes. Dans le premier cas, c'est-à-dire si le corps est à l'état élastique, la mise en compte des déformations qu'il a éprouvées à partir d'un état primitif fournit l'équation cherchée (*). Si, au contraire, l'équilibre est limite, il existe une relation sous forme finie entre les deux forces principales F_1, F_3, parallèles, en chaque point, au plan xy des déformations. Dans le cas de l'état ébouleux, auquel nous nous bornerons ici, le quotient de la différence de ces deux forces par leur somme vaut $-\sin\varphi$, égalité revenant à la formule (94) [p. 107] du mémoire précédent. Il n'y a donc plus qu'à exprimer, dans cette formule, N_1, N_2, T en fonction de x, X, ou de leurs dérivées.

Pour cela, observons d'abord que N_2 désigne, à part le signe, la pression normale, $\frac{dH}{A_1B_1} = \frac{1}{\frac{dx}{dH}}$, exercée sur l'unité d'aire de l'élément plan A_1B_1, ou que

$$N_2 = -\frac{1}{\frac{dx}{dH}}.$$

D'autre part, la force élastique appliquée à l'élément plan A_1A_2 a sa composante suivant les y nulle par construction et sa composante suivant les x désignée par $-$ X pour l'unité de projection horizontale dy, c'est-à-dire par $-$ X $\cos\theta$ pour l'unité d'aire. Or le théorème de réciprocité ou les formules connues, déduites de la considération du tétraèdre de Cauchy, qui expriment analytiquement ce théorème, permettent d'obtenir en N_1, N_2, T les deux composantes de l'action exercée sur l'unité de surface de l'élément

(*) Cette équation n'est autre que celle (28bis) ou (28ter) du mémoire précédent (p. 31); il ne resterait qu'à y substituer aux forces N_1, N_2, T, leurs valeurs obtenues ci-après (form. α') en X, $\frac{dx}{dH}$, $\frac{dx}{dy}$, et à y exprimer les dérivées prises dans le système de coordonnées rectangles x, y, ou le long d'éléments linéaires parallèles à Ox, Oy, en fonction de dérivées prises dans le système de coordonnées mixtes H et y : ces dernières dérivées sont les quotients respectifs des accroissements reçus le long d'éléments linéaires tels que A_1B_1, A_1A_2, divisés, les premiers, par dH, les seconds par dy.

Digitized by Google

plan A_1A_2, dont la normale fait avec les axes respectifs des x et des y des angles ayant pour cosinus $\cos\theta$, $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$, ou $\cos\theta$, $-\sin\theta$. Ces composantes sont

$$N_1\cos\theta - T\sin\theta,\quad T\cos\theta - N_2\sin\theta;$$

et il vient

$$T\cos\theta - N_2\sin\theta = 0,\quad N_1\cos\theta - T\sin\theta = -X\cos\theta,$$

c'est-à-dire

$$T = N_2\,\mathrm{tg}\,\theta,\quad N_1 = -X + N_2\,\mathrm{tg}^2\theta.$$

Si l'on tient compte de l'expression ci-dessus de N_2 et si l'on observe que $\mathrm{tg}\,\theta = \frac{dx}{dy}$, on aura donc :

$$(\alpha')\quad\ldots\ldots\quad N_2 = -\frac{1}{\frac{dx}{dH}},\quad T = -\frac{dx}{dy}\frac{1}{\frac{dx}{dH}},\quad N_1 = -X - \frac{dx^2}{dy^2}\frac{1}{\frac{dx}{dH}}.$$

Ces valeurs, portées dans la formule (94), donnent, en multipliant le résultat par $\left(\frac{dx}{dH}\cos\varphi\right)^2$ et groupant les termes semblables,

$$\left(X\frac{dx}{dH}\cos^2\varphi\right)^2 - 2\left(1+\sin^2\varphi - \frac{dx^2}{dy^2}\cos^2\varphi\right)\left(X\frac{dx}{dH}\cos^2\varphi\right) + \left(1+\frac{dx^2}{dy^2}\right)^2\cos^4\varphi = 0.$$

Résolvons enfin cette équation du second degré par rapport à $X\frac{dx}{dH}\cos^2\varphi$, puis effectuons des réductions qui résultent de l'égalité $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$; il viendra finalement l'équation cherchée, *caractéristique de l'état ébouleux*,

$$(\beta)\quad\ldots\ldots\ldots\quad X\frac{dx}{dH}\cos^2\varphi = \left(1 \pm \sqrt{\sin^2\varphi - \frac{dx^2}{dy^2}\cos^2\varphi}\right)^2 \ (^*).$$

(*) S'il s'agissait, non pas d'un état *ébouleux*, mais d'un état *plastique*, la différence des deux forces principales F_1, F_2 se réduirait à une quantité, 2K, sensiblement constante, au moins pour les matières beaucoup moins compressibles que déformables comme le sont toutes celles qui se laissent aisément pétrir. L'expression $4T^2 + (N_2 - N_1)^2$ vaudrait alors $4K^2$; et l'on aurait l'équation

$$\left(X\frac{dx}{dH}\right)^2 - 2\left(1-\frac{dx^2}{dy^2}\right)\left(X\frac{dx}{dH}\right) + \left(1+\frac{dx^2}{dy^2}\right)^2 - \left(2K\frac{dx}{dH}\right)^2 = 0,$$

qui, résolue par rapport à $X\frac{dx}{dH}$, devient

$$(\beta')\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad X\frac{dx}{dH} = 1 - \frac{dx^2}{dy^2} \pm 2\sqrt{\left(K\frac{dx}{dH}\right)^2 - \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$$

Digitized by Google

Le double signe, dans le second membre, correspond aux deux modes d'équilibre-limite qui peuvent se réaliser, suivant qu'on étudie soit un éboulement produit par détente horizontale des couches verticales du massif, soit, au contraire, un éboulement produit par l'écrasement latéral de ces mêmes couches, dont la matière reflue alors au-dessus de la surface libre de la masse pulvérulente. Le premier cas se présente à l'intérieur d'un massif dont le mur de soutènement commence à se renverser : alors, pour une même pression verticale X, la poussée horizontale $\frac{1}{\frac{dx}{dH}}$ atteint sa plus petite valeur, et il faut adopter le signe *plus*. Le second cas se réalise quand un mur, sous l'action d'une pression extérieure énergique, refoule derrière lui le massif qu'il soutient; c'est alors le signe *moins* qu'il faut prendre. On se borne d'ordinaire à l'étude du premier mode d'équilibre-limite, à celui pour lequel l'inverse $\frac{dx}{dH}$ de la poussée horizontale est le plus grand possible, et que régit l'équation (β) prise avec le signe supérieur $+$.

Afin d'éviter de se servir de cette équation (β), M. Rankine a allégué une prétendue difficulté de choisir entre les deux signes dont peut être affecté le radical. Dans le doute, il aurait dû traiter le problème en adoptant successivement l'un et l'autre signe. Mais il lui aurait suffi, pour lever l'indétermination, d'observer que la loi de la continuité oblige de prendre la formule avec le même signe dans le cas d'un talus supérieur courbe que dans celui d'un talus plan, lequel est un simple cas particulier du précédent.

Hypothèse adoptée par M. Rankine; ses conséquences.

III. Les deux équations du problème étant ainsi (α) et (β), on tirera de la seconde X en fonction de $\frac{dx}{dH}, \frac{dx}{dy}$, et la substitution de cette valeur de X dans la première changera (α) en une équation aux dérivées partielles du second ordre ne contenant plus que x. Si l'on pouvait intégrer celle-ci, on aurait donc une expression de x, affectée de deux fonctions arbitraires qui représenteraient, pour $H = 0$, les valeurs de x et de $\frac{dx}{dH}$ correspondantes à toutes les valeurs de y. Comme on suppose données, sur la surface supérieure SS_1, ou pour $H = 0$, les valeurs $x_0 = f(y)$, $X_0 = \Phi(y)$ de x, X, et par suite, d'après (β), celles de $\frac{dx}{dH}$, la détermination des deux fonctions arbitraires se ferait immédiatement. La fonction x étant ainsi connue, la formule (β) donnerait X et le problème de la distribution des pressions aux divers points du

Digitized by Google

milieu se trouverait résolue. Malheureusement, tant qu'on tient compte du poids du massif, ou qu'on ne pose pas $G = 0$, l'intégration qu'il faudrait effectuer pour cela paraît inabordable, si ce n'est, par approximation, lorsqu'il s'agit d'un massif ébouleux à l'intérieur duquel le coefficient différientiel $\frac{dx}{dy}$ est supposé assez peu variable (*).

Aussi M. Rankine a-t-il remplacé la seconde équation, (β), du problème par une *hypothèse* capable de rendre la première, (α), facilement intégrable. Il a tenté de généraliser un fait que présentent les massifs pesants, latéralement indéfinis, mais limités supérieurement par un talus *plan :* alors la pression verticale, Xdy, que supporte l'élément A_1A_2, équivaut au poids de la colonne de matière située au-dessus et varie proportionnellement à la profondeur, tandis que la poussée horizontale H, par une conséquence nécessaire, croît proportionnellement au carré de cette profondeur; la pression X, ainsi égale au produit d'une constante par $\sqrt{H}$, est une simple fonction de H. M. Rankine a cru pouvoir admettre qu'il en serait généralement de même, ou que la partie de la pression verticale X qui est due au poids du massif pourrait toujours être égalée avec une approximation suffisante à une simple fonction F, supposée connue, de la poussée H. Il a donc admis l'équation suivante

$$(\gamma) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad X = F(H) + \Phi(y),$$

dans laquelle le terme F(H), le seul de l'expression de X qui varie le long d'une même verticale et qui puisse provenir du poids des couches super-

(*) Mais l'intégration approchée dont il s'agit se fait alors plus simplement en coordonnées rectilignes, par la méthode suivie au n° 48 (p. 127) du mémoire précédent, qu'au moyen des coordonnées mixtes de M. Rankine. Quant au cas où l'on suppose $G = 0$, hypothèse applicable à une masse pulvérulente qui supporte des pressions très-grandes par rapport à son poids, l'intégration y est possible en renversant le problème, c'est-à-dire en se demandant, non pas quel est l'état mécanique produit au point dont les coordonnées sont (x, y), mais bien quel est le point (x, y) où se trouve produit un état mécanique déterminé : l'état mécanique en un point est d'ailleurs complétement défini (comme il a été dit au bas de la page 136 ci-dessus) par deux quantités distinctes, parfaitement susceptibles d'être choisies comme variables indépendantes, et qui sont 1° la pression moyenne p, caractérisant l'état mécanique *en grandeur,* 2° un angle, tel que l'inclinaison de la force principale la plus petite F_2 sur les x positifs, qui fixe son *mode d'orientation.* On peut voir à ce sujet, dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (t. LXXVIII, p. 757), un article des 16 et 23 mars 1874, intitulé : *Sur les lois de distribution plane des pressions à l'intérieur de corps en équilibre-limite.*

Digitized by Google

posées du massif, est ce qu'il appelle *pression verticale intrinsèque;* il désigne, au contraire, sous le nom de *pression verticale extrinsèque,* l'autre terme $\Phi(y)$, auquel se réduit X pour $H = 0$ ou qui représente *la surcharge* supportée, en chaque point de la surface SS_1, par l'unité de projection horizontale de son aire.

Posons

$$(\delta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad u = x - \frac{F(H)}{G},$$

et la relation (α), après substitution à X de sa valeur (γ), deviendra

$$(\varepsilon) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{du}{dH} = \frac{1}{G}\frac{d^2u}{dy^2}.$$

Si H désignait le temps et u la température, celle-ci, (ε), serait précisément l'équation du mouvement de la chaleur le long d'une barre athermane homogène, placée parallèlement à l'axe des y, et dont la matière aurait, avec un pouvoir émissif nul, un coefficient de conductibilité convenablement choisi. L'intégrale classique de cette équation est

$$(\zeta) \quad \ldots\ldots \quad u = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-m^2} f\left(y + 2m\sqrt{\frac{H}{G}}\right) dm,$$

où f désigne une fonction arbitraire. Différentions en effet (ζ) par rapport à H, et, observant que $me^{-m^2}dm = \frac{1}{2}d\left(-e^{-m^2}\right)$, intégrons le résultat par parties : il viendra

$$\frac{du}{dH} = \frac{1}{\sqrt{\pi GH}}\int_{-\infty}^{\infty} f'\left(y + 2m\sqrt{\frac{H}{G}}\right) me^{-m^2}dm = \frac{1}{G\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-m^2} f''\left(y + 2m\sqrt{\frac{H}{G}}\right) dm.$$

D'ailleurs, la même relation (ζ), différentiée deux fois par rapport à y, donne

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-m^2} f''\left(y + 2m\sqrt{\frac{H}{G}}\right) dm;$$

l'équation (ε) est donc bien vérifiée.

Digitized by Google

D'après l'expression (δ) de u, l'intégrale (ζ) revient à

$$(\zeta') \quad \ldots\ldots \quad x=\frac{F(H)}{G}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-m^2}f\left(y+2m\sqrt{\frac{H}{G}}\right)dm.$$

Pour $H=0$ et par suite $F(H)=0$, cette valeur de x se réduit à

$$x_0=\frac{f(y)}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-m^2}dm=f(y):$$

ainsi la fonction f ne diffère pas de celle qui représente, pour toutes les valeurs de y, l'ordonnée connue x_0 de la surface supérieure SS_1, et tout est déterminé dans les expressions (γ), (ζ') des deux quantités cherchées X, x.

Posons

$$y+2m\sqrt{\frac{H}{G}}=y',$$

de manière à substituer à m, sous le signe d'intégration, la nouvelle variable y' : il viendra

$$m=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{G}{H}}(y'-y),\quad dm=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{G}{H}}dy',$$

et la formule (ζ'), si l'on observe que $\sqrt{\pi}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-m^2}dm$, deviendra

$$(\zeta'') \quad \ldots\ldots\ldots \quad x-\frac{F(H)}{G}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{G}{4H}(y'-y)^2}f(y')\,dy'}{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{G}{4H}(y'-y)^2}dy'}.$$

On voit que l'expression de $x-\frac{F(H)}{G}$, pour des valeurs données de y et de H, c'est-à-dire en un point d'une parallèle déterminée à l'axe des x, est une moyenne de toutes les ordonnées $f(y')$ de la surface initiale SS_1, mais une moyenne prise en affectant chacune d'elles d'un coefficient d'importance, ou *taux*, $e^{-\frac{G}{4H}(y'-y)^2}$, d'autant plus voisin de sa limite supérieure 1 que le carré $(y'-y)^2$ de la distance de cette ordonnée à la parallèle dont il s'agit est plus petite et que la poussée horizontale H, exercée au-dessus du point considéré, est plus grande. Le *taux* tend à s'égaliser à mesure que H

Digitized by Google

grandit : par suite, à une certaine profondeur au-dessous de la surface SS_1, les ondulations plus ou moins irrégulières de cette surface cessent de faire sentir leur influence, et l'excès de x sur $\frac{F(H)}{G}$ devient simplement égal, le long de la parallèle considérée, à la moyenne des ordonnées, $f(y')$, de la surface SS_1, qui sont comprises à droite et à gauche de cette parallèle jusqu'à des distances d'autant plus grandes que le point dont il s'agit est situé à une profondeur plus considérable.

Telles sont les lois assez simples qui régiraient les variations de x en fonction de H, et par conséquent la poussée, si la relation hypothétique (7) était admissible.

M. Rankine examine en particulier le cas où le profil de la surface SS_1 ne s'écarte d'une droite $x_0 = Ay$, représentant sa position moyenne, que par des ondulations toutes pareilles, dont il appelle 2B la longueur en projection horizontale. On sait que l'excès $x_0 - Ay$ peut alors s'obtenir par la superposition des ordonnées d'une infinité de sinusoïdes, dont chacune aurait l'équation

$$x = C_n \sin\frac{n\pi y}{B} + C'_n \cos\frac{n\pi y}{B},$$

où n désigne un nombre entier positif quelconque et C_n, C'_n deux coefficients à déterminer. L'équation de la surface supérieure SS_1 est donc

$$(\eta) \quad \ldots\ldots\ldots \quad x_0 - Ay = \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(C_n \sin\frac{n\pi y}{B} + C'_n \cos\frac{n\pi y}{B}\right).$$

Les coefficients C_n, C'_n se déterminent d'après la règle ordinaire de Fourier, c'est-à-dire en multipliant la relation (η), soit par $\frac{dy}{B}\sin\frac{n\pi y}{B}$, soit par $\frac{dy}{B}\cos\frac{n\pi y}{B}$, et intégrant les résultats dans toute l'étendue d'une période, de $-$ B à B; si l'on a égard à ce que, chaque fois, tous les termes du second membre, sauf un seul, donnent des intégrales identiquement nulles, il vient

$$(\eta') \quad \ldots \quad C_n = \frac{1}{B}\int_{-B}^{B}(x_0 - Ay)\sin\frac{n\pi y}{B}\,dy, \quad C'_n = \frac{1}{B}\int_{-B}^{B}(x_0 - Ay)\cos\frac{n\pi y}{B}\,dy\ (*).$$

(*) C'est sans doute par mégarde que M. Rankine n'a pris les intégrales de ses formules (30) que de $-\frac{B}{2}$ à $\frac{B}{2}$, et les a par suite multipliées par $\frac{2}{B}$: il avait dû d'abord appeler B la longueur entière d'une ondulation, non la demi-longueur, et il aura laissé subsister, dans ces formules (30), sa première notation.



L'équation de la surface SS_1 se trouvant mise sous la forme (η), il vaut mieux prendre pour expression de u, au lieu de celle, (ζ), qui convient au cas d'un profil supérieur quelconque, la somme d'une infinité d'intégrales particulières, dont la première est Ay, et dont les autres sont de la forme

$$e^{-\frac{n^2\pi^2 H}{GB^2}}\left(C_n \sin\frac{n\pi y}{B} + C'_n \cos\frac{n\pi y}{B}\right):$$

chacune de ces expressions satisfait identiquement à l'équation linéaire (ε), qui est par suite vérifiée par leur somme. En substituant à u sa valeur (δ), il vient ainsi, pour tenir lieu de (ζ'),

$$(\theta) \quad \ldots\ldots \quad x = \frac{F(H)}{G} + Ay + \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 H}{GB^2}}\left(C_n \sin\frac{n\pi y}{B} + C'_n \cos\frac{n\pi y}{B}\right);$$

et cette formule, quand $H = 0$, $F(H) = 0$, se réduit bien à l'équation (η) de la surface supérieure SS_1.

IV. Au § 19 de son mémoire, M. Rankine a donné encore, d'après M. William Thomson, un procédé graphique pour intégrer de proche en proche l'équation (ε). J'indiquerai ici comment ce procédé pourrait être appliqué presque aussi simplement à l'intégration même des deux équations vraies (α) et (β) du problème. Mode graphique approché d'intégration.

Concevons qu'on ait divisé l'axe horizontal des y en petites parties Δy, d'une grandeur arbitraire mais constante, puis qu'on ait mené de haut en bas, par les points de division, des verticales indéfinies. On suppose connues l'ordonnée x et la pression verticale X pour $H = 0$, c'est-à-dire aux points d'intersection de la surface supérieure SS_1 par ces verticales, et l'on se propose de déterminer de proche en proche, sur chacune de celles-ci, les deux fonctions x et X aux points où la poussée horizontale H, exercée au-dessus, prend des valeurs successives, très-voisines et équidistantes, ΔH, $2\Delta H$, $3\Delta H$, ... Il suffit évidemment de montrer comment on obtiendra, dès que x et X seront connus pour une certaine valeur de H, les accroissements $\Delta_H x$, $\Delta_H X$ qu'éprouvent ces quantités le long des mêmes verticales quand H croît de ΔH.

Digitized by Google

On pourra d'abord, dans les deux équations (α), (β), remplacer, sauf erreur relative négligeable, les dérivées partielles $\frac{dx}{dH}$, $\frac{dX}{dH}$ par $\frac{\Delta_H x}{\Delta H}$, $\frac{\Delta_H X}{\Delta H}$. Évaluons actuellement les dérivées $\frac{dx}{dy}$, $\frac{d^2x}{dy^2}$: à cet effet, considérons, le long de la courbe d'égale poussée horizontale H, l'ordonnée x de son intersection par la verticale d'abscisse y et les deux ordonnées pareilles qui correspondent aux deux verticales voisines, dont les abscisses sont $y + \Delta y$, $y - \Delta y$. La série de Taylor donne, pour valeurs développées de ces ordonnées, que j'appellerai respectivement x_1, x_{-1},

$$x_1 = x + \frac{dx}{dy}\Delta y + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dy^2}(\Delta y)^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3x}{dy^3}(\Delta y)^3 + \frac{1}{24}\frac{d^4x}{dy^4}(\Delta y)^4 + \cdots,$$
$$x_{-1} = x - \frac{dx}{dy}\Delta y + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dy^2}(\Delta y)^2 - \frac{1}{6}\frac{d^3x}{dy^3}(\Delta y)^3 + \frac{1}{24}\frac{d^4x}{dy^4}(\Delta y)^4 + \cdots,$$

et l'on déduit de celles-ci

$$\frac{x_1 - x_{-1}}{2\Delta y} = \frac{dx}{dy} + \frac{1}{6}\frac{d^3x}{dy^3}(\Delta y)^2 + \cdots, \quad \frac{x_1 + x_{-1} - 2x}{(\Delta y)^2} = \frac{d^2x}{dy^2} + \frac{1}{12}\frac{d^4x}{dy^4}(\Delta y)^2 + \cdots,$$

ou plus simplement, en négligeant des quantités très-petites de l'ordre de $(\Delta y)^2$,

$$(\iota) \quad \ldots\ldots \quad \frac{dx}{dy} = \frac{x_1 - x_{-1}}{2\Delta y}, \quad \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{x_1 + x_{-1} - 2x}{(\Delta y)^2}.$$

Supposons qu'on ait mené, dans la courbe d'égale poussée horizontale H, la corde qui joint ses deux points situés sur deux verticales voisines de celle, d'abscisse y, que l'on considère : cette corde aura évidemment pour demi-projection verticale la demi-différence $\frac{1}{2}(x_1 - x_{-1})$, que je désignerai par l. De plus, la demi-somme $\frac{1}{2}(x_1 + x_{-1})$ sera l'ordonnée du point où la même corde coupe la verticale considérée, ayant l'abscisse y; l'expression $\frac{1}{2}(x_1 + x_{-1}) - x$ représente par suite la flèche comprise entre ce point d'intersection et celui où la même verticale coupe la courbe d'égale poussée horizontale H : j'appellerai ε cette flèche, qui est du second ordre de petitesse. Les formules (ι) deviendront ainsi

$$(\iota') \quad \ldots\ldots \quad \frac{dx}{dy} = \frac{l}{\Delta y}, \quad \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{2\varepsilon}{(\Delta y)^2},$$

Digitized by Google

et les relations (β), (α), multipliées par ΔH, prendront les formes approchées

$$(\varkappa) \quad . \ . \ (\Delta_H x) X \cos^2\varphi = \left(1 \pm \sqrt{\sin^2\varphi - \frac{t^2}{(\Delta y)^2}\cos^2\varphi}\right)^2 \Delta H, \quad \Delta_H x - \frac{\Delta_H X}{G} = \frac{2\Delta H}{G(\Delta y)^2}\varepsilon.$$

On tirera $\Delta_H x$ de la première de ces équations. La deuxième donnera ensuite $\Delta_H X$: on la rendrait extrêmement simple en prenant, avec M. Rankine, l'accroissement arbitraire et très-petit ΔH égal à $\frac{1}{2} G(\Delta y)^2$, ce qui réduirait le second membre à ε.

Une difficulté se présente à la surface SS_1 dans le cas le plus intéressant, qui est celui où la surcharge $X_0 = \Phi(y)$ s'y trouve nulle. Alors la première surface d'égale poussée horizontale se confond bien, comme l'a admis M. Rankine, avec la surface libre du massif. En effet, si l'on conçoit une couche mince de matière comprise entre deux petites parties correspondantes de la surface libre et d'une surface parallèle et infiniment voisine menée au-dessous, les pressions exercées sur la tranche (ou contour) de cette couche seront négligeables par rapport à celles que supportera sa base inférieure : la cause en est dans la faible étendue relative de cette tranche et dans la nature du milieu, qui ne comporte pas, en un même point, l'existence de pressions beaucoup plus grandes dans un sens que dans un autre (puisque le rapport de la moindre pression à la plus grande ne peut pas y descendre au-dessous de $\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}$); par suite, la pression exercée sur la base inférieure de la couche fait équilibre au poids de celle-ci et se trouve verticale, ce qui revient à dire que les surfaces de poussée uniforme sont, dans le voisinage de la surface libre, sensiblement parallèles à cette surface, ou que celle-ci ne diffère pas de l'une d'elles. Alors, pour $H = 0$, la pression verticale $\Phi(y)$ ou X est nulle, et l'équation (β) donne $\frac{dx}{dH}$ infini. Mais la difficulté se résout aisément, car les équations (α) et (β) s'intègrent aux environs de la surface libre. Multiplions la première, (α), par $2GX$ et éliminons-en $X\frac{dx}{dH}$ au moyen de la seconde, (β). Il viendra

$$(\lambda) \quad . \ . \ . \ . \ . \quad \frac{d.X^2}{dH} = \frac{2G}{\cos^2\varphi}\left(1 \pm \sqrt{\sin^2\varphi - \frac{dx^2}{dy^2}\cos^2\varphi}\right)^2 - 2X\frac{d^2x}{dy^2}:$$

cette relation, à la surface libre, c'est-à-dire quand on fait $X = 0$, $x = x_0 = f(y)$, se réduit à

$$(\lambda') \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \frac{d.X^2}{dH} = \frac{2G}{\cos^2\varphi}\left(1 \pm \sqrt{\sin^2\varphi - f'(y)^2\cos^2\varphi}\right)^2,$$

Digitized by Google

et elle donne, tant que H est très-petit,

$$X^2 = \frac{2GH}{\cos^2\varphi}\left(1 \pm \sqrt{\sin^2\varphi - f'(y)^2\cos^2\varphi}\right)^2,$$

ou bien

$$(\mu) \quad . \quad . \quad . \quad \text{(pour H très-petit)} \quad X = \frac{\sqrt{2GH}}{\cos\varphi}\left(1 \pm \sqrt{\sin^2\varphi - f'(y)^2\cos^2\varphi}\right).$$

Cette valeur approchée de X change l'équation (β), spécifiée également pour les points voisins de la surface libre, en celle-ci

$$\frac{dx}{dH} = \frac{1}{\cos\varphi}\left(1 \pm \sqrt{\sin^2\varphi - f'(y)^2\cos^2\varphi}\right)\frac{1}{\sqrt{2GH}},$$

d'où l'on déduit par l'intégration, en observant que $x = f(y)$ pour $H = 0$,

$$(\mu') \quad . \quad . \quad \text{(pour H très-petit)} \quad x - f(y) = \frac{1}{\cos\varphi}\left(1 \pm \sqrt{\sin^2\varphi - f'(y)^2\cos^2\varphi}\right)\sqrt{\frac{2H}{G}},$$

Les relations (μ) et (μ') signifient, ce qui était presque évident, que les pressions se trouvent distribuées aux environs d'une petite partie quelconque de la surface libre comme elles le seraient partout si le massif était limité supérieurement, dans toute sa longueur, par le plan tangent à la partie considérée, ou si la dérivée seconde de x en y était nulle. En y remplaçant H par ΔH, leurs premiers membres deviendront les valeurs initiales de $\Delta_H X$, $\Delta_H x$, valeurs que les formules $(\varkappa)$, devenues illusoires à cause de $X = 0$, ne pouvaient pas donner.

La méthode indiquée permettra donc d'obtenir de proche en proche, à part des erreurs le plus souvent négligeables, les valeurs de x, X, et par suite celles des forces N_1, N_2, T [données par les formules (α')], en tous les points du massif indéfini, supposé dans l'état d'équilibre-limite. On pourrait l'étendre au cas d'un massif limité d'un côté par un mur, en prolongeant alors fictivement le profil de la surface libre SS_1 en avant de la face postérieure du mur, comme si le massif était indéfini, mais en disposant de proche en proche de la forme restée arbitraire de ce prolongement, de manière à

Digitized by Google

satisfaire, toutes les fois que ce sera possible, à la condition spéciale à cette face.

La formule (μ) montre combien est inexacte l'hypothèse de M. Rankine, puisque l'expression qu'elle fournit pour X dépend, non pas seulement de H, comme il arriverait si elle pouvait être de la forme F(H), mais encore de y (*). Peut-être trouvera-t-on un jour quelque ordre de phénomènes auquel l'hypothèse considérée sera plus applicable, et qui réalisera ainsi cette curieuse analogie d'une distribution de pressions avec le mouvement de la chaleur dans une barre.

(*) M. Rankine a pris $F(H) = \frac{\sqrt{2GH}}{\cos \varphi}$, c'est-à-dire la moyenne des valeurs que donne la formule (μ) dans les deux cas opposés d'un équilibre-limite par détente et d'un équilibre-limite par compression.

Digitized by Google

ÉCLAIRCISSEMENT RELATIF AU N° 31 (P. 143).

J'ai supposé, dans la démonstration des formules (134), (134bis), que la débouchure se forme au moment où l'expulsion du cylindre central par l'orifice exige la même poussée F que la continuation de son écrasement. En effet, on peut admettre : 1° d'une part, que la pression du poinçon produira inévitablement l'écrasement du cylindre central si la hauteur h de celui-ci est très-grande ou que l'orifice soit très-loin de la partie déformée, et qu'elle amènera, au contraire, l'expulsion de ce cylindre par l'orifice si la hauteur h est fort petite; 2° d'autre part, que la poussée F nécessaire pour déformer le bloc varie avec continuité en fonction de h. Par suite, comme la déformation change rapidement de caractère à l'instant où elle cesse d'être un écrasement pour devenir un glissement du cylindre central contre l'anneau qui l'entoure, les deux poussées F nécessaires, l'une pour produire l'écrasement, l'autre pour déterminer l'expulsion de la débouchure, ont bien à ce moment égale valeur.

J'ai admis encore, au même endroit, que la plus grande des forces tangentielles exercées sur les éléments plans se croisant en un même point d'un milieu vaut la demi-différence des deux forces principales extrêmes F_1, F_3. Pour le démontrer, appelons : a, b, c les cosinus des angles que la normale à un élément plan quelconque fait avec les trois forces principales F_1, F_2, F_3; a', b', c' et a'', b'', c'' les cosinus analogues pour deux droites rectangulaires prises sur l'élément plan. D'après les formules (22) [p. 26], la composante normale $\mathfrak{N}$ (appelé N_1 dans ces formules) de l'action exercée sur l'élément plan vaudra $F_1a^2 + F_2b^2 + F_3c^2$; et la composante tangentielle $\mathfrak{T}$ de la même force aura pour carré

$$\mathfrak{T}^2 = T_3^2 + T_2^2 = (aa'F_1 + bb'F_2 + cc'F_3)^2 + (aa''F_1 + bb''F_2 + cc''F_3)^2.$$

Développons le dernier membre de celle-ci, groupons ensuite les termes semblables, et observons : 1° que les conditions exprimant la triple perpendicularité de F_1, F_2, F_3 don-

Digitized by Google

nent $b'c' + b''c'' = -bc$, etc.; 2° qu'on a aussi $a'^2 + a''^2 = 1 - a^2 = b^2 + c^2$, etc. Il viendra finalement

$$(a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathfrak{T}^2 = (F_2 - F_3)^2 b^2c^2 + (F_3 - F_1)^2 c^2a^2 + (F_1 - F_2)^2 a^2b^2,$$

formule donnée par M. Kleitz, inspecteur général des ponts et chaussées, à la page 20 de son *Étude sur les forces moléculaires dans les liquides en mouvement.*

Cette formule est d'ailleurs équivalente à celle-ci

$$(b) \quad 4\mathfrak{T}^2 = (F_1 - F_3)^2 - 4(F_1 - F_2)(F_2 - F_3)b^2 - \left[(F_1 - F_2)(1 - 2a^2) - (F_2 - F_3)(1 - 2c^2)\right]^2,$$

comme on le reconnait en remplaçant dans l'une et dans l'autre $F_1 - F_3$ par $(F_1 - F_2) + (F_2 - F_3)$ et réduisant. Or l'expression (*b*) de $4\mathfrak{T}^2$ a son premier terme $(F_1 - F_3)^2$ constant, et les deux autres essentiellement négatifs, vu que $F_1 - F_2$ et $F_2 - F_3$ sont de même signe. Le maximum de $\mathfrak{T}^2$ s'obtiendra donc en égalant ces deux derniers termes à zéro. A cet effet, il faudra poser d'abord $b = 0$ et, par suite, $a^2 + c^2 = 1$: alors, le dernier terme de (*b*), si l'on y remplace 1 par $a^2 + c^2$, se réduit à $-(F_1 - F_3)^2(c^2 - a^2)^2$, et il n'est nul que si l'on prend $a^2 = c^2 = \frac{1}{2}$. Ainsi, *la force tangentielle* $\mathfrak{T}$ *devient maximum pour les éléments plans dont la normale est bissectrice de l'angle des deux forces principales extrêmes* F_1, F_3, *et elle vaut alors* $\frac{1}{2}(F_1 - F_3)$.

ÉCLAIRCISSEMENT RELATIF AU N° 53 (P. 151).

Au haut de la page 151, j'ai supposé connu du lecteur le théorème suivant :

Si l'on mène, à partir d'un point quelconque d'un milieu incompressible soumis à des déformations planes, divers éléments rectilignes, matériels, parallèles au plan des déformations, et qu'un de ces éléments n'éprouve ni dilatation, ni contraction, l'élément rectiligne normal à celui-là n'en éprouvera pas non plus, tandis que leur glissement mutuel sera maximum; en outre, ces deux éléments rectilignes seront inclinés de 45° sur les directions des dilatations principales extrêmes ∂_1, ∂_3 *produites au même point.*

Digitized by Google

Ce théorème se déduit presque immédiatement des formules (17) [p. 25]. Il suffit 1° d'y poser $\partial_2 = 0$, $b = 0$, $b' = 0$, $a = \cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\beta$, $c = \cos\beta$, $a' = \cos\beta$, $c' = \cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\beta$, [$\beta$, $\beta + \frac{\pi}{2}$ désignant ainsi les angles que font avec la dilatation principale la plus petite ∂_3 les éléments rectilignes dont ∂_x, ∂_y exprimeront les dilatations linéaires], et 2° d'observer que la condition d'incompressibilité, devenue $\partial_1 + \partial_3 = 0$, donne $\partial_3 = -\partial_1$, pour réduire les valeurs de ∂_x, ∂_y, g_{xy} à

$$\partial_x = -\partial_1 \cos 2\beta, \quad \partial_y = \partial_1 \cos 2\beta, \quad g_{xy} = 2\partial_1 \sin 2\beta.$$

On voit : 1° que les valeurs de β qui annulent ∂_x sont bien les multiples impairs de $\frac{\pi}{4}$; 2° qu'elles sont les mêmes que celles qui annulent ∂_y et les mêmes que celles qui donnent à g_{xy} sa valeur absolue la plus grande $2\partial_1$.

ERRATA.

Page 7, ligne 9 en remontant; *au lieu de :* dans des conditions, *lire :* au milieu de circonstances.
Page 18, ligne 7 du n° 8; *au lieu de :* régidité, *lire :* rigidité.
Page 48, ligne 3 avant la formule (62bis); *au lieu de :* ζ, *lire :* ζ'.
Page 56, ligne 3; *au lieu de :* $\cos(\beta - \beta_0)$, *lire :* $\cos 2(\beta - \beta_0)$.
Page 110, ligne 11 du n° 45; *au lieu de :* frottement naturel, *lire :* frottement mutuel.
Page 113, ligne 6; *au lieu de :* $\mathfrak{T}'$, *lire :* T'.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

Digitized by Google

Digitized by Google

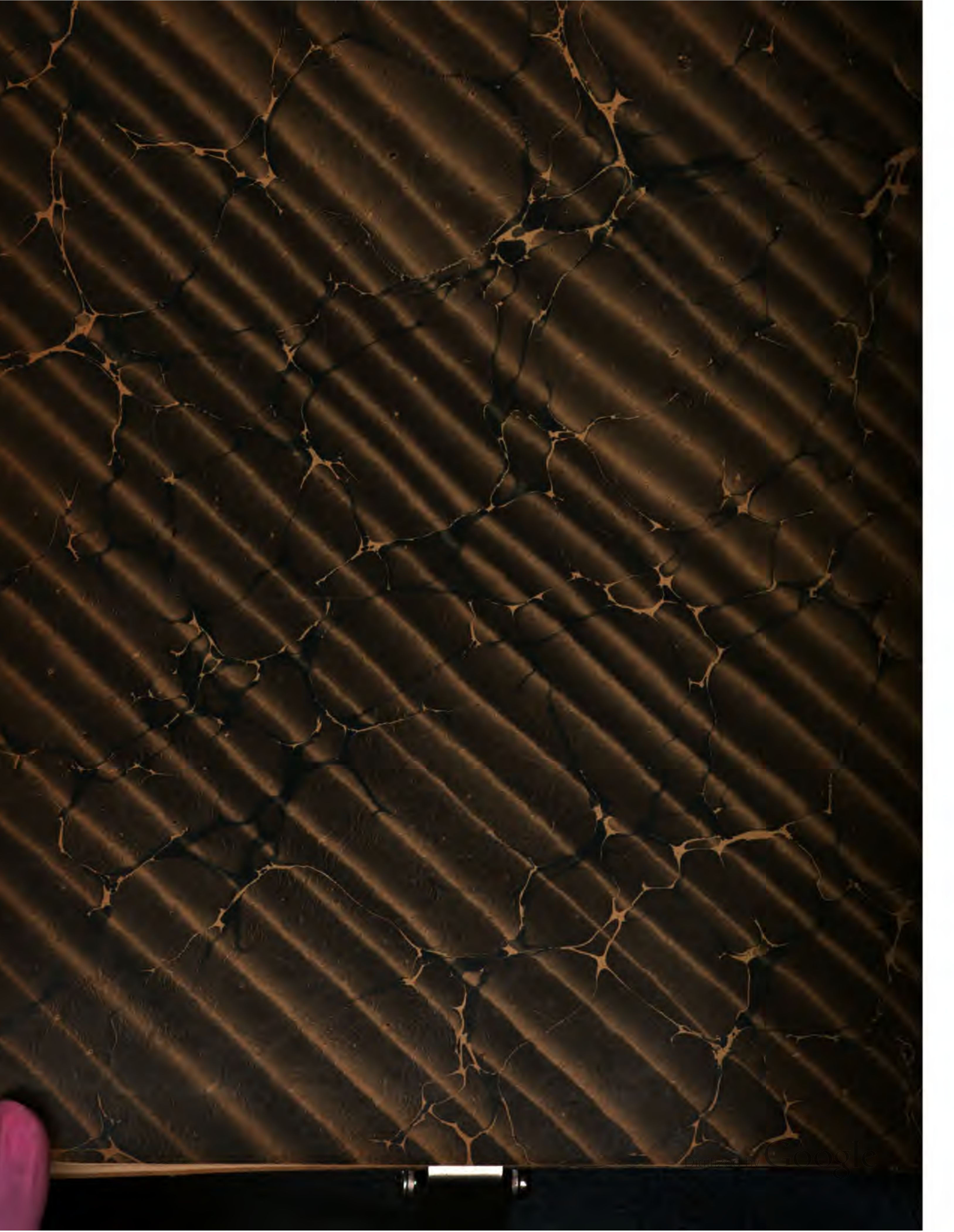
Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google




THE BORROWER WILL BE CHARGED AN OVERDUE FEE IF THIS BOOK IS NOT RETURNED TO THE LIBRARY ON OR BEFORE THE LAST DATE STAMPED BELOW. NON-RECEIPT OF OVERDUE NOTICES DOES NOT EXEMPT THE BORROWER FROM OVERDUE FEES.
WIDENER
BOOK DUE
CANCELLED
SEP - 9 1989
Digitized by Google